

Aula 5 – Probabilidade

Objetivo da Aula

Aplicar conceitos de probabilidade, reforçando o entendimento de métodos ordenados de contagem.

Apresentação

Nesta aula iremos explorar os conceitos de probabilidade, área que mede a possibilidade de um evento cuja o resultado é desconhecido. Lembre-se que para contar eventos independentes, multiplique o número de resultados possíveis em cada caso. Para calcular o número de resultados possíveis para eventos dependentes, multiplique o número de resultados possíveis em cada caso, levando em conta qualquer resultado anterior. Para calcular a probabilidade, utilize a fórmula de probabilidade que é igual a resultados alvo dividido por total de resultados. Desta forma, nesta unidade, iremos apresentar alguns cenários/problemas e verificar as soluções para os casos propostos.

1. Problemas de Probabilidade

Nesta aula, veremos problemas na área da probabilidade, que estuda o grau de segurança de um evento ocorrer. Jogos se utilizam deste ferramental, tanto em os convencionais como os digitais. Um bom exemplo de sua aplicação em jogos, no Brasil, é a própria loteria que trabalha com este ferramental para dimensionamento e cálculo de chance de cada apostador ganhar o prêmio.

01. Se um saco possui 15 bolas, com cores diferentes. Sendo 4 azuis, 3 vermelhas, 5 verdes e 3 amarelas. **Qual a chance** de retirar, ao acaso, uma **bola vermelha**?

02. Ao jogar simultaneamente um dado e uma moeda, **qual a probabilidade** de os resultados serem **coroa na moeda** e um **número primo no dado**.

03. Em uma caixa estão as 26 letras do alfabeto em pequenas etiquetas. Se duas etiquetas são retiradas em seguida, sem reposição, **qual a probabilidade de saírem duas vogais**?

04. Em um baralho de cartas existem quatro naipes (copas, paus, ouros e espadas). Cada naipe possui as seguintes cartas {Ás, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, Valete, Dama, Rei}. Sabendo disso, **qual a probabilidade** de se pegar **um Ás** ao retirar uma carta aleatória?

05. Se lançarmos uma mesma moeda 5 vezes qual a **probabilidade de sair “coroa” 4 vezes?**

06. Se considerarmos todos os divisores positivos do número 60, **qual a probabilidade** de escolhermos ao acaso, um **número primo** dentre estes divisores?

07. Uma urna possui bolas numeradas de 1 a 20. Todas as bolas possuem a mesma chance de serem retiradas. **Qual a probabilidade** de se retirar:

- a) Uma bola Ímpar?
- b) Uma bola Par?
- c) Uma bola com número Primo?
- d) Uma bola com número Par e Primo?
- e) Uma bola com número Par **ou** Primo?

08. (ENEM/2012) O diretor de uma escola convidou os 280 alunos do terceiro ano a participarem de uma brincadeira. Suponha que existem 5 objetos e 6 personagens numa casa de 9 cômodos; um dos personagens esconde um dos objetos em um dos cômodos da casa. O objetivo da brincadeira é adivinhar qual objeto foi escondido, por qual personagem e em qual cômodo da casa o objeto foi escondido. Todos os alunos decidiram participar. A cada vez um aluno é sorteado e dá a sua resposta.

As respostas devem ser sempre distintas das anteriores, e um mesmo aluno não pode ser sorteado mais de uma vez. Se a resposta do aluno estiver correta, ele é declarado vencedor e a brincadeira é encerrada.

O diretor sabe que algum aluno acertará a resposta porque há:

- a) 10 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
- b) 20 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
- c) 119 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
- d) 260 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
- e) 270 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

09. (ENEM/2013) Numa escola com 1200 alunos foi realizada uma pesquisa sobre o conhecimento desses em duas línguas estrangeiras: Inglês e espanhol.

Nessa pesquisa constatou-se que 600 alunos falam inglês, 500 falam espanhol e 300 não falam qualquer um desses idiomas.

Escolhendo-se um aluno dessa escola ao acaso e sabendo-se que ele não fala inglês, qual a probabilidade de que esse aluno fale espanhol?

- a) $1/2$
- b) $5/8$
- c) $1/4$
- d) $5/6$
- e) $5/14$

2. Soluções

01. Para calcular a probabilidade fica fácil utilizar a seguinte fórmula:

$P = \text{Número de casos que nos interessam} / \text{Número total de casos possíveis}.$

Assim sendo, temos 3 casos que nos interessam e 15 casos totais, logo:

$P = 3/15 = 0,2$ ou **20%**

02. Neste caso, podemos observar que temos que calcular duas probabilidades independentes que não se afetam. Portanto, basta calcular a probabilidade deles de forma separada e então multiplicar as suas probabilidades.

A probabilidade de cair coroa na moeda é $1/2$, pois temos um resultado desejado e dois resultados possíveis.

No dado temos 6 resultados possíveis {1, 2, 3, 4, 5, 6} e 3 resultados desejados, que são os números primos existentes no dado {2, 3, 5}. Assim, a sua probabilidade fica $3/6$ que pode ser simplificada para $1/2$. Portanto, a probabilidade de que os resultados sejam coroa e um número primo são:

$1/2 \cdot 1/2 = 1/4 = 0,25$

Ou 25%

03. Como não há reposição de etiquetas entre uma retirada e outra, a probabilidade de um evento impacta na probabilidade do outro. Neste caso os eventos A e B são ambos retirar uma vogal. Considerando que o espaço amostral total são 26 possibilidades e o resultado desejado são as vogais {a, e, i, o, u, y}, ou seja, há 6 possibilidades. Para resolver isso, primeiro calculamos a probabilidade do evento A:

$p(A) = 6/26$

Então temos que calcular a possibilidade do evento B, que também é retirar uma vogal, porém note que o espaço amostral reduziu em 1, pois uma etiqueta já foi retirada, assim como a quantidade de resultados desejados também diminuiu em um, pois, em teoria, já retiramos uma vogal da caixa.

$P(B) = 5/25$

Agora temos de multiplicar estas probabilidades para chegar ao resultado:

$$P(A \cap B) = 6/26 \cdot 5/25$$

$$P(A \cap B) = 3/13 \cdot 1/5$$

$$P(A \cap B) = 3/65$$

$$P(A \cap B) = 0,046$$

$$\mathbf{P(A \cap B) = 4,6\%}$$

04. O espaço amostral (total de eventos possíveis) é 52, pois há 52 cartas em um baralho. Já o número de casos que nos interessa é 4, pois há 4 Ás em um baralho. Desta forma, podemos calcular a probabilidade de sacar um Ás ao acaso como:

$$P = 4/52$$

$$P = 1/13$$

$$P = 0,076$$

$$\text{Ou } P = 7,6\%$$

05. Como sempre, começamos determinando qual é o espaço amostra, ou todos os resultados possíveis. Em uma moeda, existem somente 2 resultados possíveis, cara ou coroa. Se vamos jogar a moeda 5 vezes, podemos dizer que o espaço amostral é 2.2.2.2.2 ou $2^5 = 32$. Então determinamos o número de possibilidades de ocorrer o evento de interesse. Como é um número relativamente pequeno, podemos calcular ele utilizando força bruta. Para tal, vamos considerar C como cara e K como coroa abaixo e cada letra é uma instância do lançamento da moeda:

KKKKC

KKKCK

KKCKK

KCKKK

CKKKK

Estas são todas as combinações possíveis que satisfazem a premissa de “5 lançamentos de moeda e 4 resultados coroa”. Então, são 5 resultados aceitos. Assim, podemos calcular a probabilidade:

$$P = 5/32$$

$$P = 0,156$$

$$\mathbf{P = 15,6\%}$$

06. O conjunto de divisores do número 60 é composto por {1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60}. O que faz com que o nosso espaço amostral tenha 12 elementos. Destes sabemos que apenas {2, 3, 5} são números primos. Então, podemos calcular a probabilidade:

$$P = 3/12$$

$$P = 1/4$$

$$P = 0,25 \text{ ou } 25\%$$

07. Como sempre, o primeiro passo é determinar o espaço amostral, que vai ser igual para todos estes casos que vamos resolver. É o conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20} que possui 20 elementos.

a) Sabemos que {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19} são ímpares, formando 10 elementos. Portanto:

$$P = 10/20$$

$$P = 1/2$$

$$P = 0,5 \text{ ou } 50\%$$

b) O subconjunto de número pares neste caso é {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20} que também são 10 elementos, assim como no item anterior. Portanto:

$$P = 10/20$$

$$P = 1/2$$

$$P = 0,5 \text{ ou } 50\%$$

c) Números primos são aqueles que têm apenas dois divisores positivos, o número 1 e a si próprio. Deste conjunto do espaço amostral são números primos os seguintes {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}. Portanto, são 8 bolas primas e, assim, podemos calcular que:

$$P = 8/20$$

$$P = 2/5$$

$$P = 0,4 \text{ ou } 40\%$$

d) Para calcular a probabilidade de tirarmos uma bola par e prima simultaneamente temos que ver quantas bolas cumprem esta regra. No caso do nosso espaço amostral em questão apenas o número {2} é simultaneamente par e primo. Portanto, podemos calcular:

$$P = 1/20$$

$$P = 0,05 \text{ ou } 5\%$$

e) Já sabemos dos exercícios anteriores a probabilidade de tirarmos um número par, um número primo e um número par e primo simultaneamente. Para calcular a probabilidade de tirar um par ou um primo calculamos $P(\text{par}) + P(\text{primo}) - P(\text{par e primo})$. Portanto:

$$P = 0,5 + 0,4 - 0,05$$

$$P = 0,85 \text{ ou } 85\%$$

08. Para chegarmos ao resultado temos que primeiro determinar qual é o número total de possibilidades. Sabemos que são 5 objetos, 6 personagens e 9 cômodos. Portanto, podemos calcular assim:

$$5 * 6 * 9 = 270$$

Sabemos também que são 280 alunos selecionados e que cada resposta deve ser distinta da anterior, então o diretor tem certeza de que alguém vai acertar pois há 10 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

a) Certa.

09. Primeiro, temos que determinar o número de alunos que falam pelo menos uma língua estrangeira que é o total menos a quantidade de alunos que não fala nenhuma língua estrangeira

$$1200 - 300 = 900$$

Então, podemos calcular o número de alunos que falam inglês e espanhol, vamos considerar este número como x:

$$(600 - x) + (500 - x) + x = 900$$

$$-x - x + x = 900 - 600 - 500$$

$$-x = -200$$

$$x = 200$$

Agora podemos calcular a probabilidade de um aluno falar espanhol, porém não falar inglês. Sabendo que ele não fala inglês, o espaço amostra fica $1200 - 600 = 600$. Sabemos que dos 500 que falam espanhol, 200 falam também inglês, então o evento desejado é $500 - 200 = 300$. Portanto, podemos calcular:

$$P = 300/600$$

$$P = 1/2$$

a) Certa.

Considerações Finais da Aula

Vimos nesta aula problemas relacionados à probabilidade, que é um ramo da Matemática em que as chances de ocorrência de experimentos são calculadas. Como vimos nos exercícios, é com o ferramental de probabilidade que podemos ter a expectativa de que um evento ocorra ou não. Veja os materiais complementares e os links indicados para esta aula e faça os exercícios para o pleno desenvolvimento dos conceitos e da utilização do ferramental de probabilidade.

Materiais Complementares



Vídeo

PROBABILIDADE CONDICIONAL | RÁPIDO e FÁCIL

2020, DicaDemat Sandro Curió.

Apresenta exercício de probabilidade condicional.

Link para acesso: <https://youtu.be/WlUgwydaLcw> (acesso em 07 jun. 2023.)



Vídeo

Agora Ficou Fácil | Probabilidade

2018, DicaDemat Sandro Curió.

Apresenta os conceitos de probabilidade.

Link para acesso: <https://youtu.be/g80xAhW-Xi4> (acesso em 07 jun. 2023.)

Referências

ABDALLA, Samuel L. **Raciocínio lógico para concursos**. São Paulo: Saraiva Educação, 2018.