



ARGUMENTOS

UNIDADE

3



José Nogueira

Livro Eletrônico

Aula 4 – Probabilidade

Objetivo da Aula

Compreender conceitos fundamentais de probabilidade, de forma a ter conhecimento para compreender e saber como aplicar o estudo de probabilidades.

Apresentação

A matemática é uma ciência completa e estratificada em diversos ramos. Nesta aula, vamos conversar sobre um ramo da matemática: a probabilidade.

A probabilidade é um ramo da matemática em que se examinam as chances de ocorrência de determinado resultado. É por meio de uma probabilidade, por exemplo, que podemos saber desde a chance de tirar 6 (seis) no lançamento de um dado até a de tirar cara ou coroa no lançamento de uma moeda. Esse ramo da matemática é amplamente utilizado na computação nas áreas de jogos, inteligência artificial, rede de computadores, banco de dados, entre outros.

1. O que É a Probabilidade?

Probabilidade é uma área da matemática que estuda a chance ou a possibilidade de que um evento ocorra. Podemos observar que a probabilidade está presente em diversos campos do conhecimento, como ciências, negócios, computação e jogos de azar, por exemplo.

Para as ciências, em geral, a probabilidade é fundamental para a compreensão de fenômenos naturais e as tomadas de decisões baseadas em dados. No mundo dos negócios, é importante aplicar probabilidade para análise de riscos e tomada de decisões em situações incertas, como um investimento. Para os jogos de azar, ela pode ser utilizada para calcular as chances de ganho ou perda em diferentes situações.

EXEMPLO

Em um jogo de dados, é possível calcular a probabilidade de se obter determinado resultado e, com isso, decidir qual a melhor estratégia a se tomar.

Em computação, a probabilidade pode ser utilizada com diversos objetivos:

- Inteligência artificial.
 - Algumas técnicas de aprendizado de máquina utilizam probabilidade para ensinar os modelos de inteligência artificial a aprender e tomar decisões, com base em dados e exemplos.
- Redes de computadores.
 - A probabilidade é utilizada para modelar e analisar o desempenho de sistemas de redes de computadores.
- Segurança de informação.
 - A probabilidade é usada em criptografia e para analisar a probabilidade de quebra de algoritmos de segurança e protocolos.
- Banco de dados.
 - A probabilidade auxilia na modelagem e análise da distribuição de dados. Além disso, determina a eficiência dos algoritmos de busca e recuperação de dados.
- Simulação.
 - A probabilidade é utilizada para criar modelos de simulação, que permitam ao usuário a possibilidade de simular eventos e sistemas complexos.

Quando pensamos em modelos matemáticos, podemos separar duas principais classificações de modelos que são definidos de acordo com o fenômeno a ser estudado.

O **modelo determinístico** é o modelo matemático em que todas as variáveis envolvidas são conhecidas e precisamente definidas, então não há incerteza no resultado do modelo. Esse modelo é baseado em leis físicas ou matemáticas precisas que permitem prever o resultado com exatidão, sem a influência de fatores aleatórios. O exemplo clássico desse modelo matemático é o de queda livre de corpos, em que a trajetória de um objeto em queda livre pode ser calculada, com precisão, usando as leis de física.

Essa característica de certeza torna esse modelo muito confiável, e por isso é utilizado em diversas áreas. No entanto, existem situações em que o modelo determinístico não é o suficiente para descrever ou prever um fenômeno. Por exemplo, em situações em que a incerteza é alta, como em sistemas biológicos complexos ou em mercados financeiros, o modelo determinístico não leva em consideração a aleatoriedade e a variabilidade, que são fundamentais para a compreensão e previsão desses sistemas.

Por esses motivos, existem situações em que se dá a preferência para utilizar o que chamamos de **modelo estocástico, probabilístico ou aleatório**. O modelo estocástico é

utilizado quando as variáveis envolvidas têm um componente de aleatoriedade ou incerteza. Diferentemente do modelo determinístico, o estocástico não permite prever o resultado exato, mas sim uma distribuição de probabilidades dos resultados possíveis.

Um exemplo clássico do modelo estocástico é o lançamento de uma moeda girando ao ar. Não temos como prever o resultado, porém podemos fazer uma distribuição dos possíveis resultados, que, nesse caso, são 50% de chance de ser cara e 50% de chance de ser coroa. Essa flexibilidade de utilizar variáveis, em vez de valores fixos, permite que se modelem sistemas complexos e incertos, e, mesmo que não se saiba o resultado exato, pode-se chegar a um certo nível de confiabilidade das probabilidades dos resultados alcançados na conclusão desse tipo de estudo.

2. Conceitos Fundamentais da Probabilidade Básica

É necessário conhecer os conceitos básicos da probabilidade para que se consiga compreender como aplicar o estudo de probabilidades.

- **Experimento probabilístico ou aleatório.**

É um experimento em que o resultado é incerto e depende do acaso. É, basicamente, o que é estudado em probabilidade. Para que um experimento seja considerado probabilístico, ele deve cumprir três critérios básicos:

- O resultado deve ser incerto.
 - Jogar um dado é incerto, pois não temos como saber qual será o resultado, por exemplo.
- O experimento deve ser repetível indefinidamente com condições similares.
 - Jogar uma moeda para o alto é repetível indefinidamente sob condições similares para comparações.
- Os possíveis resultados devem ser bem definidos.
 - Ao jogar um dado de seis faces somente uma vez, o resultado parece completamente aleatório; porém, ao jogar o mesmo dado sob as mesmas condições muitas vezes, começa-se a observar um padrão de probabilidade, em que existem seis resultados possíveis, e cada um deles tem 16,66% de chance de ocorrer.

- **Espaço amostral.**

Esse é um conjunto comumente chamado de (S) , que possui como seus elementos todos os resultados possíveis do experimento aleatório. Outra forma de compreender o espaço amostral é que ele é o conjunto universo dos resultados de um dado experimento aleatório.

Esse conjunto pode ser enumerável, finito ou contínuo e infinito. Considere lançar um dado ou pegar uma carta de um baralho; o espaço amostral do dado seria $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, enquanto o do baralho seria $S = \{\text{Ás de ouro, 2 de ouro, 3 de ouro, 4 de ouro, 5 de ouro, 6 de ouro, 7 de ouro, 8 de ouro, 9 de ouro, 10 de ouro, Valete de ouro, Dama de ouro, Rei de ouro, ...}\}$. Esses dois exemplos seriam de espaços amostrais enumeráveis e finitos.

- **Evento ou ocorrência.**

Um evento é uma parte do espaço amostral que representa um resultado ou conjunto de resultados de um experimento aleatório. Em outras palavras, um evento é uma coleção de um ou mais resultados possíveis de um experimento aleatório. Eles costumam ser retratados com letras maiúsculas. Em suma, um evento ou uma ocorrência é um subconjunto do espaço amostral S .

Considere, novamente, um dado de seis faces sendo lançado. O espaço amostral, como já vimos, seria $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Podemos pedir alguns eventos ou ocorrências para serem destacados ali, como:

- A = Ocorrência de números par.
 - $A = \{2, 4, 6\}$.
- B = Números abaixo de 5.
 - $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

Podemos classificar os eventos de diversas formas, dependendo de suas propriedades:

- Simples.
 - Evento que contém apenas um resultado, como obter um número par abaixo de 4 de resultado no lançamento do dado.
- Composto.
 - Contém mais de um resultado, como obter um número par no lançamento do dado.
- Complementar.
 - É o evento que possui todos os resultados que complementam determinado evento. Por exemplo, obter números pares é um evento complementar a obter números ímpares no lançamento de dados.
- Mutuamente exclusivo.
 - Eventos que não podem ocorrer simultaneamente. Como obter número par e obter número ímpar no lançamento do dado.

- Independente.
 - Eventos que não afetam a probabilidade um do outro. Por exemplo, ao lançar dois dados, o resultado de um não afeta o resultado do outro; são eventos independentes.

- **Operações com eventos.**

Considerando que tanto o espaço amostral (S) como seus eventos são conjuntos e subconjuntos, respectivamente, todas operações possíveis de serem feitas em Teoria dos Conjuntos aqui se aplicam também. Podemos fazer uniões, interseções, diferenças e todas as outras relações possíveis entre dois ou mais conjuntos.

- **Ponto amostral.**

Um ponto amostral é um resultado possível de um experimento aleatório ou estocástico. O espaço amostral como um todo e todos os eventos são formados de pontos amostrais. No caso do lançamento de dados, os pontos amostrais seriam cada um dos números de 1 a 6 que representam todos os resultados possíveis para aquele experimento.

- **Eventos especiais.**

- Impossível.
 - Um evento que nunca vai acontecer é representado pelo conjunto vazio ($\emptyset$). Consideramos ele um evento, pois, na Teoria dos Conjuntos, o conjunto vazio é um subconjunto de todo e qualquer conjunto, menos de si próprio.
- Certo.
 - É um evento que acontece sempre quando o experimento é realizado. Dessa forma, poderíamos dizer que o evento em questão, então, seria o próprio espaço amostral, porém todo conjunto também é um conjunto de si próprio.
- Mutuamente exclusivo.
 - Dois eventos são considerados mutuamente exclusivos quando a ocorrência de um impede a ocorrência do outro. Na Teoria dos Conjuntos, eles são conhecidos como “conjuntos disjuntos”, que não possuem elementos em comum.

3. Regras Básicas da Probabilidade

As regras básicas da probabilidade são os princípios fundamentais que governam o cálculo da probabilidade de eventos. Essas regras são amplamente utilizadas em estatística,

ciência, negócios, jogos de azar e muitos outros campos. As regras básicas incluem: regra da soma; regra do produto; regra da probabilidade condicional; e regra da probabilidade total.

A **regra da soma** nos diz que a probabilidade da união de dois eventos A e B é dada pela soma das probabilidades dos eventos individuais menos a probabilidade da interseção dos dois eventos. Ou seja:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Suponha que você está jogando um jogo de tabuleiro com um dado de seis faces. Você aposta que o resultado do lançamento será um número ímpar ou um número maior que 4. Para calcular a probabilidade dessa aposta, podemos usar a regra da soma, começando por estas observações:

- $P(A)$ = Números ímpares em um dado de 6 faces = 1, 3 e 5.
 - Logo, a probabilidade é de $3/6$ ou $1/2$, simplificado.
- $P(B)$ = Números maiores que 4 em um dado de 6 faces = 5 e 6.
 - Logo, a probabilidade é $2/6$ ou $1/3$.
- A interseção de $P(A)$ e $P(B)$ é 5.
 - Logo, a probabilidade é $1/6$.

Com essas informações, podemos substituir os valores na regra da soma:

$$P(A \cup B) = 1/2 + 1/3 - 1/6$$

$$P(A \cup B) = 2/3$$

A probabilidade de ganhar essa aposta é de $2/3$, ou 66,7%, aproximadamente.

Regra da probabilidade condicional é a probabilidade de um evento B ocorrer, dado que um evento A já ocorreu, sendo dada pela probabilidade da interseção de A e B dividida pela probabilidade de A. Ou seja:

$$P(B|A) = P(A \cap B) / P(A)$$

EXEMPLO

Suponha uma sala de aula tem 50 alunos, sendo eles 15 homens e 35 mulheres. Sabendo que 10 homens e 15 mulheres foram selecionados para uma apresentação, qual a probabilidade de uma pessoa ser sorteada se ela é do sexo feminino?

Confira a tabela de dados a seguir.

	SORTEADO	NÃO SORTEADO	TOTAL
HOMEM	10	5	15
MULHER	15	20	35
TOTAL	25	25	50

- Evento A: pessoa foi sorteada para a apresentação.
 - $P(A) = 25$ = total de pessoas sorteado para apresentação.
- Evento B: pessoa é uma mulher.
 - $P(A \cap B) = 15$ = interseção entre conjuntos mulher e sorteado.

Então, podemos aplicar a fórmula:

$$P(B|A) = 15/25$$

$$P(B|A) = 3/5$$

Regra do produto defende que a probabilidade da interseção de dois eventos A e B é dada pelo produto das probabilidades de cada evento. Ou seja:

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B|A)$$

Sendo que $P(B|A)$ é a probabilidade condicional de B ocorrer, dado que A já ocorreu.

Se observarmos bem a fórmula, podemos reparar que a regra do produto é uma inversão da regra da probabilidade condicional. Basta inverter as probabilidades $P(B|A)$ e $P(A \cap B)$.

Por fim, a **regra da probabilidade total** nos informa que, se houver dois ou mais eventos mutuamente exclusivos que cobrem todo o espaço amostral, a probabilidade de um evento qualquer é dada pela soma das probabilidades dos eventos individuais que cobrem esse evento.

Em outras palavras, seja A um evento do espaço amostral S e $\{A_i \mid i = 1, 2, 3, \dots, n\}$ um conjunto de eventos distintos, cuja união é todo o espaço amostral, a probabilidade de o evento A acontecer é calculada pela seguinte fórmula:

$$Pr(A) = \sum_n Pr(A \cap B_n)$$

Ou seja, a probabilidade de A acontecer é igual ao somatório da interseção de todos os eventos.

Considerações Finais da Aula

Nesta aula, conversamos sobre probabilidade. Vimos os modelos determinístico e estocástico, de modo que, no primeiro, todas as variáveis envolvidas são conhecidas, enquanto, no segundo modelo, as variáveis envolvidas têm um componente de aleatoriedade ou incerteza – neste modelo, não se permite prever o resultado exato, mas sim uma distribuição de probabilidades dos resultados possíveis.

Trabalhamos alguns conceitos básicos usados em probabilidade e as regras básicas do tema que permitem calcular a probabilidade de um evento ocorrer. Essas regras básicas são: regra da soma, que é a probabilidade de união de dois eventos A e B; regra da probabilidade condicional, referente à probabilidade de um evento B ocorrer, dado que um evento A já ocorreu; regra do produto, que afirma que a probabilidade da interseção de dois eventos A e B é dada pelo produto das probabilidades de cada evento; e a regra da probabilidade total, em que a probabilidade de um evento qualquer é dada pela soma das probabilidades dos eventos individuais que cobrem esse evento.

Materiais Complementares



Livro:

Matemática, Probabilidade e Estatística

2023, Josimar Padilha. Gran.

Material apresenta questões de concursos no tema de probabilidade.

Link para acesso: <https://www.grancursosonline.com.br/download-demonstrativo/download-aula-pdf-demo/codigo/4bF6TVvUWQo%3D> (acesso em 2 jun. 2023.)



Artigo

Probabilidade

2023, Luiz Paulo Moreira.

Apresenta conceitos de probabilidade, que é o estudo das chances de ocorrência de um resultado.

Link para acesso: <https://brasilecola.uol.com.br/matematica/probabilidade.htm> (acesso em 2 jun. 2023.)

Referências

ROSS, Sheldon. Probabilidade. [s.l.]: [s.n.], 2010. E-book. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788577806881/>. Acesso em: 09 abr. 2023.