



ARGUMENTOS

UNIDADE

3



José Nogueira

Livro Eletrônico

Aula 1 – Conjuntos, Produto Cartesiano, Relações e Funções

Objetivo da Aula

Compreender conceitos matemáticos relacionados aos conjuntos, às funções e aos produtos cartesianos.

Apresentação

O estudo de conjuntos é essencial para a melhor compreensão da Teoria dos Conjuntos. Essa, por sua vez, é um ramo fundamental da matemática que nos possibilita compreender assuntos mais complexos, como funções e gráficos matemáticos.

Assim, a compreensão dos conjuntos e da sua teoria os permite elaborar gráficos complexos e compostos, que nos auxiliam a compreender melhor dados abstratos e, com isso, fazer uma melhor tomada de decisões informada.

1. Conjuntos

A Teoria dos Conjuntos é um dos ramos do raciocínio lógico matemático que se dedica ao estudo de conjuntos. **Os conjuntos são coleções formais de elementos.** Esses elementos podem ser números, letras, palavras, objetos, entre outros. Vale ressaltar que qualquer elemento pode ser reunido em conjunto, porém a Teoria dos Conjuntos costuma lidar mais com elementos relevantes para os fundamentos matemáticos.

A Teoria dos Conjuntos tem como objetivo principal desenvolver uma estrutura matemática formal para lidar com a noção de conjuntos, incluindo as operações e relações que podem ser definidas sobre eles.

Como um dos conceitos mais importantes de matemática e o conceito-chave da Teoria dos Conjuntos, os conjuntos são extremamente importantes. Por isso, devemos saber identificá-los, demonstrá-los e compreendê-los.

Vamos começar com os conceitos básicos e as suas denotações formais.

1.1. Denotações

Podemos demonstrar conjuntos de três formas distintas:

- **Extensão.**

- Todos os elementos do conjunto são listados explicitamente.
- Ideal para conjuntos pequenos e finitos.
- $X = \{a, b, c, d, e\}$.
 - A é um conjunto que contém as letras a, b, c, d, e.
 - Em outras palavras, X é um conjunto formado por esses cinco elementos específicos.

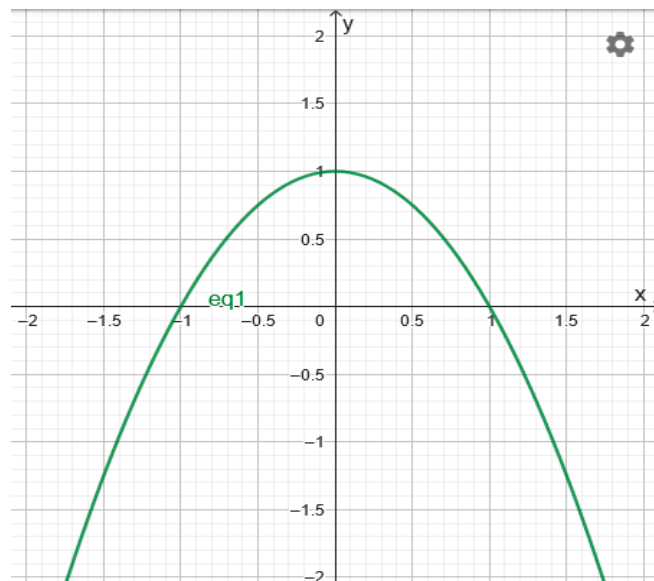
- **Compreensão.**

- Os elementos de um conjunto notado por compreensão são descritos por uma propriedade em comum que eles possuem.
- $Y = \{x \mid x \text{ é um número primo menor do que } 25\}$.
 - Y é o conjunto dos números x, tal que x é um número primo menor do que 25.
 - Em outras palavras, Y é o conjunto de todos os números primos que são menores do que 25.
- O símbolo “|”, em matemática, é lido como “tal que” e é utilizado para definir conjuntos de compreensão, entre outros.

- **Representação gráfica.**

- É um conjunto em que seus elementos são representados no plano cartesiano.
 - Um plano cartesiano é um sistema de coordenadas bidimensional utilizado para representar graficamente pontos, linhas e curvas no espaço.
- $Z = \{(x, y) \mid x^2 + y = 1\}$.
 - Z é o conjunto de todos os pares ordenados (x, y) tais que o x ao quadrado mais y é igual a 1.
 - Em outras palavras, Z é o conjunto de todos os pontos, no plano cartesiano, que satisfazem a equação $x^2 + y = 1$.
 - Confira o gráfico gerado pela equação $x^2 + y = 1$, aplicado em um plano cartesiano:

Gráfico 1: Gráfico aplicado em plano cartesiano



Fonte: Elaboração própria, através da ferramenta gratuita Geogebra.
Disponível em: <https://www.geogebra.org/graphing?lang=pt>. Acesso em: 26 mai. 2023.

1.2. Conceitos

O próprio **conjunto** é um dos conceitos essenciais; ele costuma ser representado por letras maiúsculas. Os **elementos** que compõem o conjunto costumam ser representados por letras minúsculas.

Surge, então, a necessidade de explicar a noção de **pertinência** dos conjuntos. A **pertinência** é a característica associada a um elemento que faz parte de um conjunto. Em outras palavras, é a forma de identificarmos que um elemento pertence a um conjunto.

- “ $\in$ ” para pertinência.
 - Lemos o símbolo $\in$ como “elemento de” ou “pertence a”.
- “ $\notin$ ” para não pertinência.
 - Lemos o símbolo $\notin$ “não elemento de” ou “não pertence a”.

Considerando um conjunto $Z = \{a, b, c, d, e\}$, podemos afirmar que $a \in Z$ e que $f \notin Z$.

Subconjuntos é o nome que se dá a um conjunto em que todos os elementos também pertencem a outro conjunto. Existem dois tipos de subconjuntos, próprio e impróprio.

- **Subconjunto próprio.**
 - Um subconjunto próprio é um subconjunto de um conjunto maior que não contém todos os elementos do conjunto maior.

- Em outras palavras, se W é um subconjunto próprio de Z , existe pelo menos um elemento de W que não está em Z .
- Utilizamos o símbolo " $\subset$ " para representar subconjuntos próprios.
- $W = \{a, b, c\}$, enquanto $Z = \{a, b, c, d, e\}$.
 - Logo, $W \subset Z$.
 - Repare que $d \in Z$, porém $d \notin W$, dessa forma existe pelo menos um elemento de Z que não pertence a W , tornando próprio o subconjunto a .

• **Subconjunto impróprio.**

- Um subconjunto impróprio é aquele que contém todos os elementos do conjunto maior.
- Em outras palavras, se W é um subconjunto impróprio de Z , então W é igual a Z
- Utilizamos o símbolo " $\subseteq$ " para representar subconjuntos impróprios.
 - $W = \{a, b, c\}$, enquanto $Z = \{a, b, c\}$.
 - Logo $W \subseteq Z$.
 - Podemos falar também que $W = Z$.
- Dessas definições, podemos concluir que todo conjunto é um subconjunto impróprio de si mesmo.

Um **conjunto vazio**, como o nome sugere, é um conjunto que não possui qualquer elemento. Podemos representá-lo utilizando $\{\}$ ou $\emptyset$. Vale destacar que não devemos nunca combinar os dois símbolos assim $\{\emptyset\}$, pois isso indica que há um elemento nulo no conjunto, tornando-o unitário, não vazio. É aceitável a conclusão que todo conjunto possui um subconjunto vazio dentro de si, menos o próprio conjunto vazio que não possui nenhum elemento.

A **cardinalidade** de um conjunto é a quantidade de elementos que ele possui. No caso de conjuntos finitos, é comum utilizarmos a letra " n " para denotar a cardinalidade do conjunto. Também, é comum utilizar o símbolo " $|$ ", de forma que, se queremos representar a cardinalidade de determinado conjunto W , podemos colocar $|W|$ para sinalizar isso. No caso de conjuntos infinitos, utilizamos o Aleph-zero ($\aleph_0$) para indicar a infinita cardinalidade do conjunto. Isso porque o Aleph-zero permite que enumeremos e comparemos infinitos diferentes, uma vez que podemos afirmar que o Aleph-um ($\aleph_1$) é o menor número acima de Aleph-zero. Assim, podemos comparar conjuntos infinitos, caso necessário.

O **conjunto de partes** (ou conjunto potência) é como chamamos o grupo completo de todos os subconjuntos de um conjunto. Considere o conjunto $W = \{a, b, c\}$; seus subconjuntos seriam:

- $\{\}$
- $\{a\}$
- $\{b\}$
- $\{c\}$
- $\{a, b\}$
- $\{a, c\}$
- $\{b, c\}$
- $\{a, b, c\}$

É comum representá-lo assim:

- $P(W) = \{\{\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

O conjunto de partes sempre vai possuir mais conjuntos do que a cardinalidade do conjunto original, mesmo que este possua uma cardinalidade infinita. De fato, podemos provar que, dado um conjunto de cardinalidade n , o conjunto de partes que o representa terá 2^n elementos. No exemplo acima, o conjunto W possui 3 elementos; seu conjunto de partes, então, fica $2^3 = 8$, como podemos observar.

2. Produto Cartesiano

Agora que já entendemos melhor os conceitos básicos de conjuntos, na Teoria dos Conjuntos, podemos nos aprofundar em suas relações e operações. O primeiro passo nessa direção é compreender o que é um produto cartesiano. Em termos simples, um **produto cartesiano** é uma operação matemática que combina dois conjuntos para formar um novo conjunto, cujos elementos são todas as possíveis combinações ordenadas de um elemento do primeiro conjunto com um elemento do segundo conjunto.

Entenda, se W e Z são dois conjuntos, então o produto cartesiano de W e Z , detonado por $W \times Z$, é um conjunto cujos elementos são todos os pares ordenados (x, y) , em que x é um elemento de W , e y é um elemento de Z .

Por exemplo, considere os conjuntos $W = \{a, b, c\}$ e $Z = \{d, e, f\}$.

- $W \times Z = (x, y)$
- $W \times Z = \{(a, d), (a, e), (a, f), (b, d), (b, e), (b, f), (c, d), (c, e) \text{ e } (c, f)\}$

No caso do produto cartesiano, a ordem dos elementos importa, considerando que é um par ordenado. No exemplo acima, o que vem antes da vírgula sempre está representando um elemento de W , e o que vem depois da vírgula sempre está representando um elemento Z . Dessa forma, $(1, 4)$ e $(4, 1)$ seriam elementos totalmente diferentes, inclusive o $(4, 1)$ não existe no $W \times Z$ desse exemplo em questão.

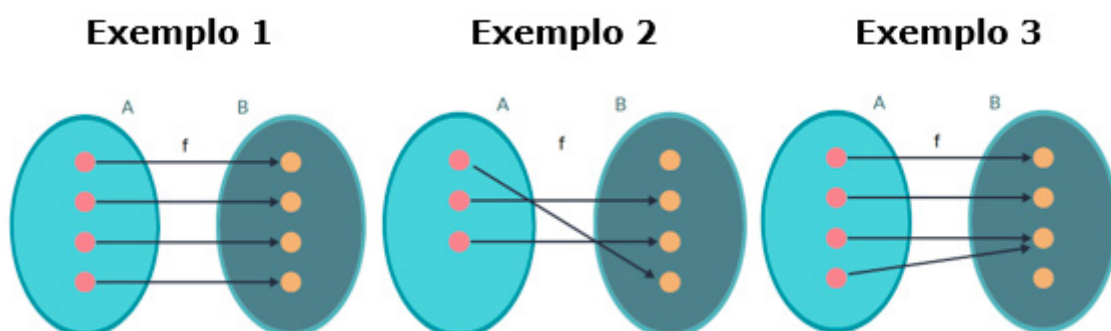
A cardinalidade do produto cartesiano é o produto da cardinalidade dos conjuntos que o compõem. Voltando ao exemplo acima, a cardinalidade de W é 3 e de Z também é 3, logo o produto de suas cardinalidades é $3 \cdot 3 = 9$. Repare que há 9 elementos no produto cartesiano deles. Podemos representar isso da seguinte forma:

$$|W \times Z| = |W| \cdot |Z|$$

3. Funções

Uma **função** é uma relação entre dois conjuntos, em que ocorre uma correspondência entre os elementos de um conjunto A com os elementos de um conjunto B . Sendo que, no caso da função, cada elemento do conjunto A deve ter somente um correspondente no conjunto B . Nesse caso, o conjunto A recebe o nome de **domínio**, enquanto o conjunto B recebe o nome de **contradomínio**, que compreende todos os valores possíveis para essa função. Chamamos de **imagem** os valores que são, de fato, utilizados do contradomínio. Ao aplicarmos a lei de formação da função, podemos dizer que a imagem é sempre um subconjunto do contradomínio. Quando essa relação é formada, descrevemos ela da seguinte forma " $f: A \rightarrow B$ " e lemos assim: **função de A em B** .

Vamos ver exemplos de representações de funções válidas entre dois conjuntos abaixo.

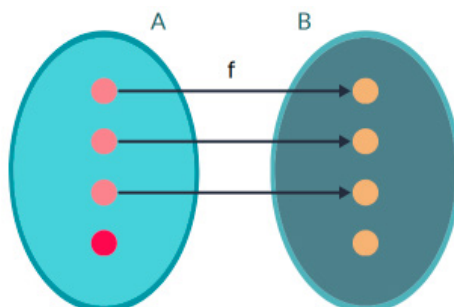


Os três exemplos são funções válidas, pois todos os elementos do domínio (conjunto A) estão se relacionando com um elemento do contradomínio (conjunto B). Não há problema nenhum existirem elementos ociosos no contradomínio, como no Exemplo 2, assim como

não há nenhum problema de mais de um elemento do domínio se relacionar com o mesmo elemento do contradomínio, tal qual no Exemplo 3.

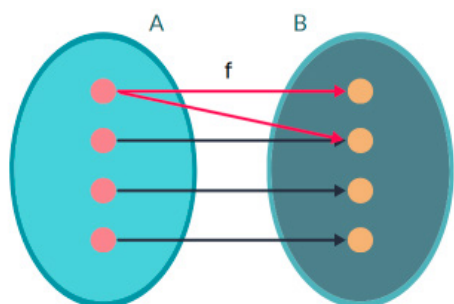
Agora, vamos ver exemplos de funções inválidas.

Exemplo 4



O Exemplo 4 é inválido, pois podemos observar que há um elemento (destacado em vermelho) no domínio que não está se relacionando com nenhum elemento do contradomínio. Todos os elementos do domínio devem estar relacionados para que seja uma função.

Exemplo 5



Já o Exemplo 5 está inválido, visto que, apesar de todos os elementos do domínio estarem se relacionando, o primeiro elemento está fazendo duas relações com o contradomínio (também destacado como funções vermelhas). Os elementos do domínio devem ter somente uma relação com os elementos do contradomínio, enquanto os elementos do contradomínio podem se relacionar com qualquer número de elementos do domínio.

Toda função deve seguir uma **lei de formação**, a qual é uma regra matemática que relaciona cada elemento do domínio a um único elemento do contradomínio. Ao aplicarmos a lei de formação, nos conjuntos em questão, somos capazes de determinar a imagem da função. Cada função possui sua própria lei de formação. Por exemplo, " $f(x) = x^2 + 1$ " é uma lei de formação de uma função quadrática.

3.1. Tipos de Funções

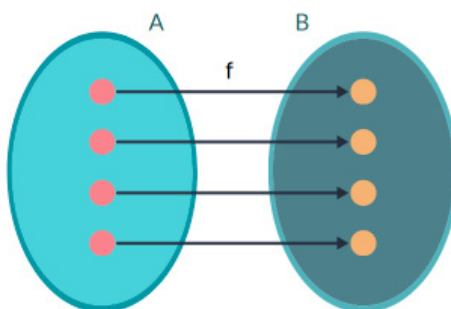
Existem duas classificações distintas de funções. Uma quanto à relação entre o domínio e o contradomínio, e outra quanto à sua lei de formação.

Começando pela classificação quanto à **relação entre o domínio e o contradomínio** da função, possuímos três possíveis tipos de funções:

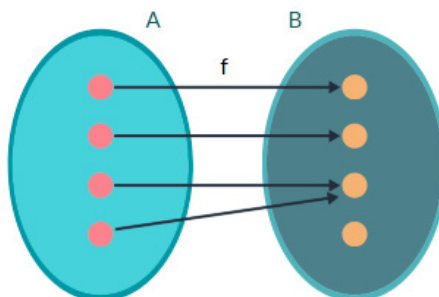
- **Função injetora.**

- Uma função é classificada como injetora apenas se cada elemento do domínio possuir uma imagem distinta no contradomínio.
- Em outras palavras, para se encaixar nessa classificação, os elementos do domínio não podem dividir o mesmo correspondente no contradomínio.

A função a seguir é considerada injetora, pois todos os elementos do domínio possuem seus próprios correspondentes no contradomínio.



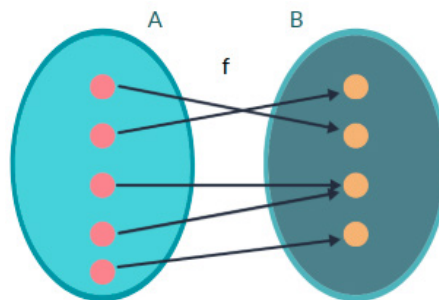
A função representada abaixo é considerada não injetora, pois existem elementos que compartilham da mesma imagem no contradomínio.



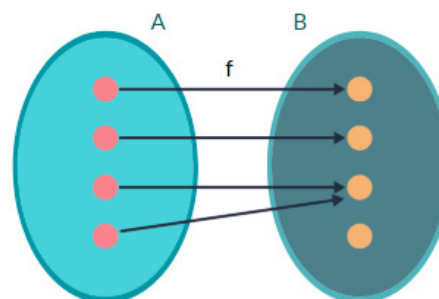
- **Função sobrejetora.**

- Podemos chamar uma função de “sobrejetora” se todos os elementos do contradomínio forem imagens de pelo menos um elemento do domínio.

O exemplo abaixo é uma função sobrejetora, pois todos os elementos do contradomínio são imagens de pelo menos um elemento do domínio.

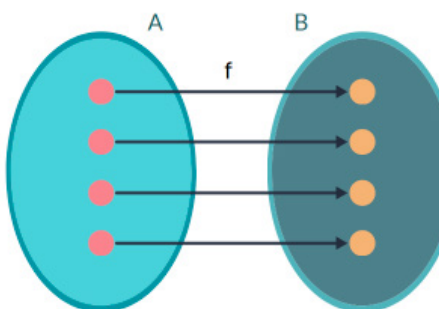


Já a seguir, temos um exemplo de função considerada não sobrejetora, uma vez que existe pelo menos um elemento do contradomínio que não se relaciona com o domínio.



• **Função bijetora.**

- Para que a gente possa chamar uma função de bijetora, ela deve ser injetora e sobrejetora ao mesmo tempo, satisfazendo as duas condições simultaneamente.



Observe como esse exemplo é de uma função injetora e sobrejetora ao mesmo tempo. Todos os elementos do contradomínio são imagens de somente um elemento do domínio.

Agora, vamos para a classificação de funções **quanto à sua lei de formação**.

• **Polinomiais.**

- Uma função polinomial é aquela cuja lei de formação é um polinômio.
 - Um polinômio é uma expressão algébrica, que utiliza operadores aritméticos e variáveis de diversas magnitudes.

- A magnitude do polinômio determina o grau da função, sendo estes:

- Primeiro grau ou função afim:

$$f(x) = ax + b$$

- 2º grau ou função quadrática:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

- 3º grau ou função cúbica:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

- Assim se segue sucessivamente.

- **Modular.**

- Chamamos de “modular” aquela função cuja lei de formação existe uma variável dentro de um módulo. Esse módulo pode possuir qualquer tipo de expressão algébrica.
- Módulo é quando queremos o valor absoluto do número. O valor absoluto é a distância numérica entre o número em questão e o zero.
- Por exemplo, o módulo de -3 é 3. Assim como módulo 3 é, também, 3.
- Representamos módulo quando colocamos a variável ou expressão dentro deste símbolo: $|x|$. Por exemplo:

$$f(x) = |ax + b|$$

- **Exponencial.**

- Uma função exponencial é quando a variável está no expoente, não na base. Por exemplo:

$$f(x) = a^x$$

- Podemos observar que “a” é uma constante, enquanto x é a variável em função, tornando exponencial essa função.

- **Logarítmica.**

- Podemos chamar a função de “logarítmica” quando há um logaritmo de base “a” em sua lei de formação. “a” deve ser um número real, diferente de 1.

$$F(x) = \log_a x$$

- **Trigonométrica.**

- Por fim, uma função trigonométrica é quando, em sua lei de formação, há uma razão trigonométrica.

- As razões trigonométricas são, por exemplo, seno, cosseno e tangente:

$$f(x) = \text{sen } x$$

$$f(x) = \text{cos } x$$

$$f(x) = \text{tan } x$$

4. Plano Cartesiano

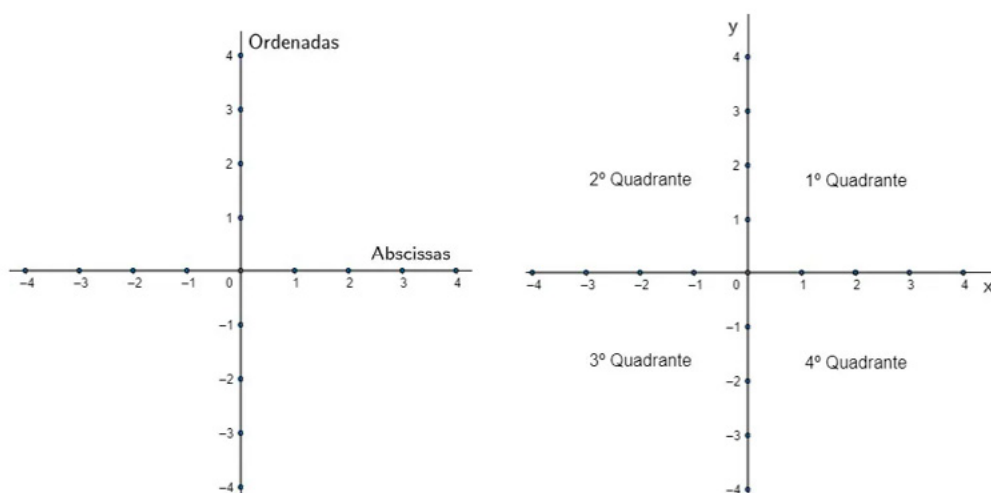
Um plano cartesiano é, em sua essência, um sistema de coordenadas. Utilizando dois eixos perpendiculares, podemos aplicar o produto cartesiano para criar representações gráficas de diferentes funções.

Para criar um plano cartesiano, devemos colocar o eixo vertical, chamado de “eixo das ordenadas”, e o eixo horizontal, chamado de “eixo das abscissas”. Podemos, também, chamar o eixo das ordenadas de “y” e o eixo das abscissas de “x”. O plano fica, então, dividido em quatro quadrantes, que são numerados a partir da superior direita em sentido anti-horário. Devemos, ainda, adicionar os marcadores de passo – os valores que determinam a escala do gráfico em si.

Como estamos usando dois eixos e fazendo um gráfico bidimensional, todo e qualquer ponto que ali pode ser representado é visto como um par ordenado da seguinte forma: (x, y). Assim, x representa um valor no eixo das abscissas, e y representa um valor no eixo das ordenadas.

Observe:

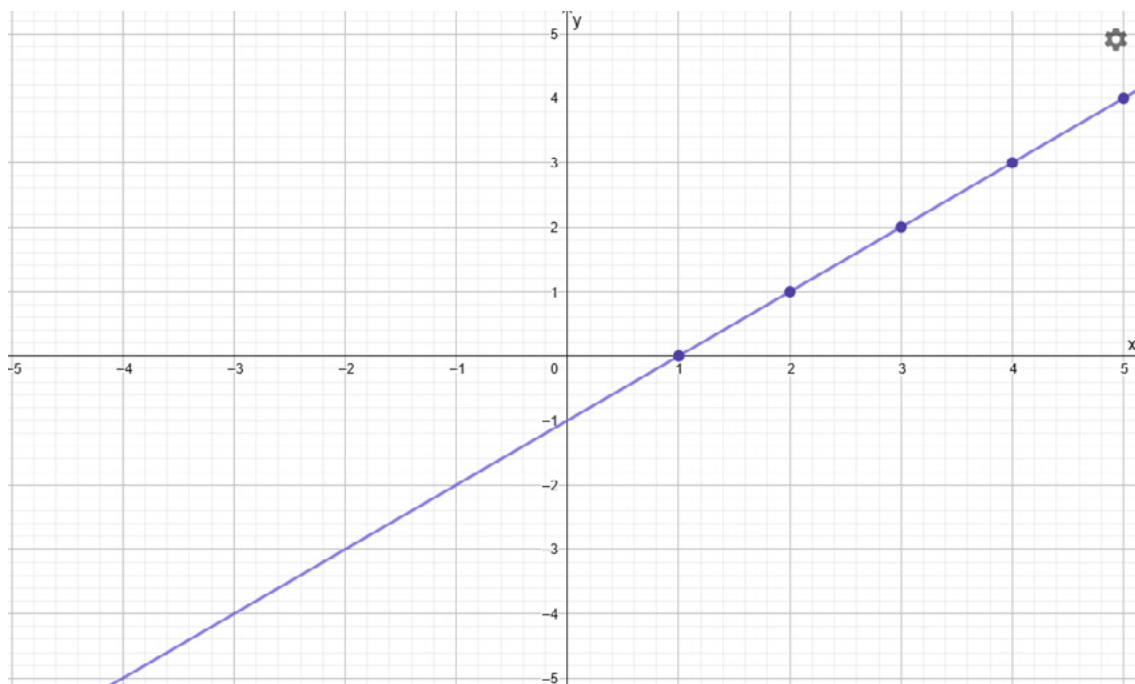
Gráfico 2: Gráfico bidimensional



Fonte: Elaboração própria.

Com o plano desenhado, podemos pegar uma função qualquer e aplicar a sua lei de formação para desenharmos a sua representação gráfica. Por exemplo, se pegarmos a função “ $f(x) = x - 1$ ”, obtemos o seguinte gráfico:

Gráfico 3: Função representada em gráfico



Fonte: Elaboração própria.

Outra forma de interpretar a função é “ $y = x - 1$ ”, e podemos observar isso no gráfico. Para qualquer valor de x , nessa função afim, o valor de y é um a menos na reta azul desenhada. Se pegarmos os cinco pontos ali destacados, no primeiro quadrante, podemos falar quais são os seus pares ordenados (x, y) : $(1, 0)$, $(2, 1)$, $(3, 2)$, $(4, 3)$ e $(5, 4)$.

Considerações Finais da Aula

A Teoria dos Conjuntos é uma matéria essencial para estudo de lógica e raciocínio matemático. Compreender os conjuntos permite um poder de abstração maior, que nos ajuda na tomada de decisão.

Tendo compreendido isso, podemos aplicar funções que são representadas por gráficos e facilitam a nossa visualização de dados complexos, permitindo uma melhor tomada de decisões baseada em conceitos de raciocínio lógico matemático.

Materiais Complementares



Raciocínio Lógico e Matemático: Teoria dos Conjuntos

2023, Josimar Padilha. Gran.

Apresenta questões de concurso de Teoria dos Conjuntos, representações por diagramas e operações.

Link para acesso: <https://www.grancursosonline.com.br/download-demonstrativo/download-aula-pdf-demo/codigo/1iU0n3Vg1aM%3D> (acesso em 2 jun. 2023.)



Método Telles: Raciocínio Lógico Estratégico Operações com Conjuntos Prof Luis Telles

2018, Luis Telles.

Vídeo do Gran que apresenta resolução de questões de concurso do professor Luis Telles.

Link para acesso: <https://www.youtube.com/watch?v=v6Os8no5PPo> (acesso em 2 jun. 2023.)

Referências

MENEZES, Paulo Blauth; TOSCANI, Laira Vieira; LÓPEZ, Javier García. Aprendendo matemática discreta com exercícios. 19. ed. Porto Alegre: Bookman, 2011. E-book. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/books/9788577805105>. Acesso em: 9 abr. 2023.