

Aula 2 – Tabelas-Verdade e Quantificadores

Objetivo da Aula

Compreender a importância da utilização das tabelas-verdade e dos quantificadores na área de lógica matemática.

Apresentação

A lógica matemática é uma área importante da matemática e da filosofia que se dedica ao estudo das leis do pensamento e raciocínio. Uma das ferramentas mais importantes da lógica matemática são as tabelas-verdade, que nos permitem analisar e simplificar expressões lógicas complexas.

Uma tabela-verdade mostra todas as possíveis combinações de valores de entrada para uma expressão lógica e o resultado correspondente para cada combinação. Elas são usadas para analisar e entender expressões lógicas complexas.

Quantificadores lógicos são outra ferramenta importante que nos permite expressar quantidades precisas de objetos ou proposições. Ao combinar conhecimentos de tabelas-verdade e quantificadores lógicos, podemos criar expressões lógicas complexas que nos permitem modelar sistemas mais complexos ou tomar decisões mais informadas. São ferramentas utilizadas em ciência da computação, engenharia, filosofia, matemática e muitos outros campos de estudo.

1. Tabelas-Verdade

Tabelas-verdade são ferramentas úteis para determinar os valores de verdade de sentenças lógicas complexas, especialmente as que envolvem muitas proposições, conectivos e operadores lógicos. Elas permitem que você liste todas as possíveis combinações de valores de cada proposição e, assim, determine o valor de verdade resultante para cada combinação possível.

Essas tabelas-verdade são muito importantes na lógica proposicional e em áreas relacionadas, como ciência da computação e teoria da computação. Nessas áreas, elas são utilizadas para que se confirmem os resultados possíveis e esperados, dada determinada entrada de dados e valores. Assim, é possível determinar a validade de argumentos e expressões lógicas complexas que formam os sistemas de computadores, seus algoritmos e circuitos lógicos.

As tabelas são compostas de colunas que representam cada uma das variáveis de entrada, bem como de colunas adicionais para cada expressão lógica relevante para o resultado da expressão lógica. Cada linha deve representar uma combinação única de valores de entrada, e o valor resultante da expressão é exibido na coluna de resultado, ao final da tabela.

A partir dos princípios fundamentais de lógica proposicional, que incluem o fato de que uma proposição deve ser verdadeira ou falsa, mas nunca ambas as coisas ao mesmo tempo, e de que proposições podem ser combinadas utilizando os conectivos e operadores, foram criadas regras para a criação dessas tabelas. Ao longo dos anos, essas regras foram refinadas quando a lógica proposicional evoluiu para se tornar uma disciplina matemática formal. Essas são as regras para uma formação de tabela-verdade coesa:

1. Para uma proposição simples, a tabela-verdade terá apenas duas linhas, uma para cada possível valor de verdade.

2. Para proposições compostas, a tabela-verdade terá tantas linhas quanto forem necessárias para incluir todas as combinações possíveis de valores de verdade para suas proposições componentes.

3. Cada linha da tabela corresponde a uma combinação de valores de verdade para as proposições componentes. Por exemplo, se tivermos duas proposições componentes, P e Q, a tabela terá quatro linhas correspondendo às quatro combinações possíveis (V, V), (V, F), (F, V) e (F, F) – em que temos o número de combinações possíveis indicado pela fórmula 2 elevado a n , sendo n o número de elementos (número de combinações = 2^n).

4. Para cada proposição composta, a tabela deve incluir uma coluna para tal proposição componente, uma coluna para o resultado da operação lógica e uma linha para cada combinação possível de valores de verdade para as proposições componentes.

5. A última coluna da tabela-verdade deve conter o valor de verdade resultante da operação lógica para cada combinação de valores de verdade das proposições componentes.

6. Para construir a tabela-verdade para uma proposição composta que inclui conectivos lógicos, você deve seguir as regras de precedência dos conectivos, tal qual qualquer expressão matemática. Essa ordem de precedência é tal que:

- a. Negação $\neg$
- b. Conjunção $\wedge$
- c. Disjunção $\vee$
- d. Condicional $\rightarrow$
- e. Bicondicional $\leftrightarrow$

7. Lembre-se de que o objetivo da tabela-verdade é mostrar todas as possíveis combinações de valores de verdade para as proposições componentes e o valor de verdade resultante para cada combinação possível. Isso permite que se determine a validade de argumentos e expressões lógicas complexas.

Levando isso em consideração, vamos formar as tabelas-verdade que utilizam as operações e os conectivos lógicos básicos. A partir da compreensão e capacidade de montar essas tabelas, é possível escalonar para sentenças cada vez mais complexas.

Considere cada operador e conectivo lógico e tente montar as tabelas de acordo com os exemplos a seguir; confira aqui se acertou na confecção dessas tabelas.

- **Negação $\neg$ (NOT)**

P	$\neg P$
V	F
F	V

- **Conjunção $\wedge$ (AND)**

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

- **Disjunção Inclusiva $\vee$ (OR)**

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

- **Disjunção exclusiva $\oplus$ (XOR)**

P	Q	$P \oplus Q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

• **Condicional** $\rightarrow$

P	Q	$P \rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

• **Bicondicional/equivalente** $\leftrightarrow$

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Observe que essas tabelas-verdade mostram todas as possíveis combinações de valores de entrada para cada operador ou conectivo lógico, bem como o resultado correspondente para cada combinação. Considerando isso, vamos construir as tabelas-verdade de algumas sentenças mais complexas.

Dessa forma, podemos resumir conforme a tabela a seguir:

Conectivo	Símbolo	Operação Lógica	Descrição
NÃO (NOT)	$\neg$	Negação	Proposição verdadeira, valor falso e reciprocamente
E (AND)	$\wedge$	Conjunção	Só será verdadeiro se todas as proposições forem verdadeiras
OU (OR)	$\vee$	Disjunção	Será verdadeiro quando no mínimo uma proposição for verdadeira
Se... então...	$\rightarrow$	Condicional	Será falsa quando a proposição antecedente for verdadeira e a consequente for falsa
... se e somente se...	$\leftrightarrow$	Bicondicional	Será verdadeira quando ambas as proposições forem verdadeiras ou falsas

Vamos lá?

Caso deseje, tente fazer você mesmo as tabelas-verdade e, então, confira se o seu resultado foi igual ao desta aula! Caso o seu resultado seja diferente, analise bem a sua tabela em comparação com os meus resultados para compreender o que aconteceu de errado.

EXEMPLO

Caso 1) Considere a seguinte sentença lógica:

“Helena foi a uma loja e pediu blusa verde e vermelha”.

P: verde

Q: vermelha

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Nesse exemplo, caso o termo *“verde e vermelha”* tenha sentido conjuntivo, podemos deduzir que Helena queria blusas que teriam, em sua estampa, as cores verde e vermelha dispostas na blusa.

EXEMPLO

Caso 2) Considere a seguinte sentença lógica:

“Thomaselli é brasileiro ou italiano”.

P: brasileiro

Q: italiano

Nesse exemplo, podemos entender Thomaselli tanto pode ser brasileiro como ser italiano, mas não possui as duas nacionalidades (exclusivo).

P	Q	$P \oplus Q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Podemos, também, entender no sentido inclusivo, segundo o qual Thomaselli pode ser brasileiro ou italiano ou ter as duas nacionalidades.

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

EXEMPLO

Caso 3) Considere a seguinte sentença lógica:

“Tonho ou é filho de Ari ou é filho de Oto”.

P: filho de Ari

Q: filho de Oto

P	Q	$P \oplus Q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Nesse exemplo, Tonho não pode ser filho dos dois concomitantemente. Caso seja filho de um, não pode ser do outro.

EXEMPLO

Caso 4) Considere a seguinte sentença lógica:

$$(P \rightarrow P \vee Q) \wedge (R \leftrightarrow Q)$$

Dados p, q e r proposições quaisquer, vamos construir a tabela-verdade, com base nas condições já apresentadas:

P	Q	R	$P \vee Q$	$P \rightarrow P \vee Q$	$R \leftrightarrow Q$	$(P \rightarrow P \vee Q) \wedge (R \leftrightarrow Q)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	F	F
V	F	V	V	V	F	F
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	F	F
F	F	V	F	V	F	F
F	F	F	F	V	V	V

EXEMPLO

Caso 5) Considere a seguinte sentença lógica:

$$((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R)) \rightarrow S$$

Vamos trabalhar outro exemplo abstrato para praticar os conceitos lógicos que utilizamos em uma sentença para chegar a um resultado:

P	Q	R	S	$(P \wedge Q)$	$\neg P$	$\neg P \wedge R$	$((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R))$	$((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R)) \rightarrow S$
V	V	V	V	V	F	F	V	V
V	V	V	F	V	F	F	V	F
V	V	F	V	V	F	F	V	V

P	Q	R	S	$(P \wedge Q)$	$\neg P$	$\neg P \wedge R$	$((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R))$	$((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R)) \rightarrow S$
V	V	F	F	V	F	F	V	F
V	F	V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	F	F	F	F	F	V
V	F	F	V	F	F	F	F	V
V	F	F	F	F	F	F	F	V
F	V	V	V	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V	V	V	F
F	V	F	V	F	V	F	F	V
F	V	F	F	F	V	F	F	V
F	F	V	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	F	V	V	V	F
F	F	F	V	F	V	F	F	V
F	F	F	F	F	V	F	F	V

Repare que, nessa tabela, cada linha representa uma combinação de valores de verdade para as proposições P, Q, R e S, e a última coluna mostra o valor de verdade resultante da expressão completa para cada combinação. Para montar essa tabela, primeiro coloquei todas as possibilidades de valores para as proposições, então simplifiquei a sentença como um todo, para seus elementos mais simples, e fui resolvendo aos poucos até chegar a todos resultados possíveis, assim como seria feito com uma expressão matemática tradicional.

Destaque

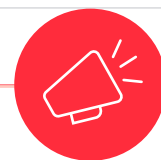
Aqui, estou usando (V) e (F) para representar os valores de verdadeiro ou falso, porém é necessário reconhecer outras notações, como (T) para *true* ou verdadeiro e (F) para *false* ou falso. O valor mais comum de ser utilizado é (0) para falso ou (1) para verdadeiro.



2. Quantificadores

Quantificadores lógicos são utilizados para expressar proposições que envolvem a quantidade de elementos, em um conjunto ou em uma proposição, permitindo a formalização rigorosa de argumentos e conceitos matemáticos. A compreensão dessa ferramenta é essencial para o estudo da lógica matemática e para a construção de argumentos sólidos e rigorosos, em várias áreas que requerem raciocínio matemático e lógico, assim como para auxiliar na tomada de decisões. Existem dois tipos de quantificadores: universal e existencial.

Destaque



É importante ressaltar que, apesar de serem ferramentas poderosas, os quantificadores possuem limitações. Por exemplo, a afirmação “todo ser humano tem dois olhos” é verdadeira para a maior parte da população e pode ser utilizada como um quantificador universal, porém devemos levar em consideração que existem exceções. Dessa forma, é necessário reconhecer que, para as afirmações feitas pelos quantificadores, sejam universais ou existenciais, pode haver exceções ou nuances.

2.1. Universal

O quantificador universal é denotado pelo símbolo $\forall$ e é usado para expressar que determinada proposição é verdadeira para todos os elementos em um conjunto. Mais formalmente, o quantificador universal é definido da seguinte forma: seja $P(x)$ uma proposição que depende de uma variável x que pertence a um conjunto S . O quantificador universal “ $\forall x P(x)$ ” afirma que a proposição $P(x)$ é verdadeira para todos os valores de x em S . Quantificadores universais são utilizados para expressar afirmações que se aplicam a todos os elementos de um conjunto.

EXEMPLO

Considere o conjunto $S = \{2, 4, 6, 8\}$ e seus elementos de variável x . Considere, agora, a proposição $P(x) = “x \text{ é um número par}”$. Dessa forma, podemos afirmar que “ $\forall x P(x)$ ”. Em outras palavras, essa sentença lógica com quantificador universal nos diz que todos os elementos “ x ” ($\forall x$) estão de acordo com a proposição $P(x)$ – o que podemos atestar que é verdade, pois sabemos que o conjunto S , a quem o x pertence, é composto somente de números pares.

Devemos, então, considerar as seguintes propriedades.

- Escopo de quantificação.
 - O escopo de uma proposição é a parte da proposição em que o quantificador atua. No caso do quantificador universal, o escopo é a parte da proposição que depende da variável quantificada.
 - No exemplo “ $\forall x P(x)$ ”, o escopo do quantificador é $P(x)$, que é o mesmo que afirmar que o escopo é todos valores possíveis da variável x .
- Distributividade.
 - O quantificador universal pode ser distribuído sobre conjunções e disjunções de proposições.
 - $\forall x (P(x) \wedge Q(x))$ é exatamente igual e equivalente a $(\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$, por exemplo.

- Negando um quantificador universal.
 - A negação de um quantificador universal é equivalente a um quantificador existencial negado.
 - $\neg \forall x P(x)$ é equivalente a $\exists x \neg P(x)$.

2.2. Existencial

Um quantificador lógico existencial é denotado pelo símbolo $\exists$ e é utilizado para expressar que pelo menos um elemento, em um conjunto, satisfaz determinada proposição. Formalmente, podemos definir esse quantificador assim: sejam $P(x)$ uma proposição que depende de uma variável x e S um conjunto. O quantificador existencial $\exists x P(x)$ afirma que existe pelo menos um valor de x em S para o qual a proposição $P(x)$ é verdadeira.

Considere o conjunto $S = \{1, 4, 5, 8\}$ e a variável x que representa um elemento desse conjunto. Considere, então, a proposição $P(x) = "x \text{ é um número ímpar}"$. Dessa forma, podemos fazer a afirmação formal $\exists x P(x)$, que nos diz que há pelo menos um elemento em S em que essa proposta se concretiza.

Devemos, no entanto, considerar propriedades importantes parecidas com as dos quantificadores universais, descritas a seguir.

- Escopo de quantificação.
 - O escopo da proposição é o escopo que o quantificador busca representar.
- Distributividade.
 - $\exists x (P(x) \wedge Q(x))$ é equivalente a $(\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x))$.
- Negando um quantificador existencial.
 - A negação de um quantificador existencial é um quantificador universal negado.
 - $\neg \exists x P(x)$ é equivalente a $\forall x \neg P(x)$.

Considerações Finais da Aula

Podemos concluir que as tabelas-verdade são ferramentas poderosas para auxiliar o nosso entendimento de sentenças lógicas complexas e longas. Elas nos permitem destrinchar, de forma simples e lógica, todos os conectivos e operadores lógicos aplicados em cima das proposições.

Os quantificadores permitem que afirmações grandiosas sejam feitas quanto ao escopo que a sentença lógica está representando. Quando usados em conjunto com as tabelas-verdade, podem transformar sentenças e proposições lógicas em sistemas ainda mais complexos de lógica.

Material Complementar



Introdução à lógica matemática

2013, Carlos Alberto F. Bispo, Luiz B. Castanheira e Oswaldo Melo Souza Filho. São Paulo, Cengage Learning.

Link para acesso: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/books/9788522115952>
(acesso em 2 abr. 2023.)

Referências

NICOLETTI, Maria do C. *A Cartilha da Lógica*. 3. ed. [s.l.]: Grupo GEN, 2017. E-book. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788521633433/>. Acesso em: 22 mar. 2023.