

Aula 1 – Proposições, Conectivos e Operações Lógicas

Objetivo da Aula

Compreender a importância de proposições, conectivos e operações na lógica da matemática e para a compreensão da linguagem formal.

Apresentação

Proposições, conectivos e operações lógicas são fundamentais para o estudo da lógica matemática e para a compreensão da linguagem formal. Uma proposição é uma sentença que pode ser verdadeira ou falsa, enquanto os conectivos são palavras ou símbolos usados para conectar proposições, formando novas proposições. As operações lógicas são regras que permitem combinar proposições e conectivos e, assim, produzir novas proposições.

O estudo das proposições, conectivos e operações lógicas é de grande importância para diversas áreas, como a ciência da computação, a matemática e a filosofia. Além disso, essa área da lógica é fundamental para o desenvolvimento de raciocínio crítico e para a análise de argumentos em diversas situações cotidianas.

1. Proposições Lógicas

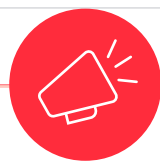
Proposições lógicas são a base da lógica matemática e um dos principais conceitos na teoria da computação, na filosofia e em outras áreas que envolvem análise de argumentos e raciocínio. Elas são uma forma de expressar uma afirmação que pode ser verdadeira ou falsa, mas não ambas.

As proposições lógicas se fazem importantes, pois elas nos permitem formular argumentos e expressar raciocínios com precisão, eliminando ambiguidade e nos permitindo chegar a conclusões corretas.

EXEMPLO

“Se chove a grama fica molhada” é uma proposição que estabelece uma relação de causa entre estas duas condições: chover e a grama ficar molhada. Utilizando essa proposição, podemos prever que a grama ficará molhada se chover, assim como podemos inferir que choveu se encontrarmos a grama molhada.

Destaque



Proposições lógicas, em sua mais simples descrição, são compostas de uma declaração simples que pode ser avaliada como verdadeira ou falsa. Isso significa que uma proposição lógica não pode ser uma pergunta, um comando ou até mesmo uma frase que não tenha como ser avaliada como verdadeira ou falsa.

Como base da lógica matemática, proposições são ferramentas essenciais para o raciocínio crítico e a análise de argumentos. Uma vez estabelecidas as proposições, é possível combiná-las com operações lógicas que nos permitem construir proposições mais complexas e analisar suas relações lógicas. Devido à natureza dessas proposições mais complexas, podemos utilizar as tabelas da verdade e as Leis de Morgan para simplificar as proposições e assim avaliar sua validade.

Existe uma vertente filosófica que debate o uso do termo “proposição”. Essa vertente prefere utilizar o termo “sentença” para os mesmos fins. Isso ocorre, pois, proposições, apesar de serem essenciais e amplamente utilizadas em várias áreas, dependem da interpretação de quem as formula e de quem as lê. O que é verdade para um pode não ser verdade para outro, dependendo de seus pontos de vista. Algumas áreas, como certas ciências avançadas e filosofia, possuem dificuldades de formular sentenças que possuem a verdade ou falsidade absoluta. Tudo isso resulta em uma limitação de criatividade na criação das hipóteses formuladas pelas proposições. Por isso, é possível encontrar literatura que vai se referenciar a essa ferramenta como *proposição*, e outras que vão se referenciar como *sentença* – apesar de poucas diferenças, elas podem ser utilizadas de forma intercambiável.

1.1. Valores da Verdade

Uma proposição deve sempre possuir um valor ao menos, seja verdadeiro ou falso. Essa classificação é feita dependendo do fato de a afirmação feita nela ser coerente com a realidade ou não. Esse valor de verdade é fundamental para a integridade da lógica e para o raciocínio matemático, pois a validade de um argumento depende da validade das proposições que o compõem.

O conceito de verdadeiro ou falso é extremamente comum nas nossas vidas, a ponto de que necessitar de uma definição pode causar certa estranheza. Porém, para a lógica formal, é necessário que todo o processo esteja bem definido, de forma que não exista espaço para ambiguidades – um dos principais motivos para utilização de modelos matemáticos de raciocínio.

Para fins formais, consideramos **verdadeira** uma proposição que corresponda à realidade ou que possa ser comprovada como verdadeira por meio de lógica ou evidências empíricas.

EXEMPLO

A proposição “ $2 + 2 = 4$ ” é verdadeira, pois essa é uma verdade matemática comprovada. Da mesma forma, podemos afirmar que “a Terra gira em torno do Sol” como uma proposição verdadeira, visto que corresponde ao conhecimento científico baseado em evidências empíricas e estudos.

Ainda tratando de lógica formal, consideramos **falsa** a proposição que não corresponda à realidade ou que possa ser comprovada como falsa por meio de lógica ou evidência empírica.

EXEMPLO

A proposição “ $1 + 1 = 3$ ” é falsa, pois vai contra a lógica matemática básica. Também podemos afirmar que a proposição “a Terra é plana” é falsa, já que isso foi provado por meio de evidências científicas.

Em certos casos, pode haver proposições que não podem ser classificadas claramente como verdadeiras ou falsas, como proposições que envolvam crenças pessoais ou emoções subjetivas. Porém, para que ocorra a lógica formal, é necessário que elas sejam classificadas como verdadeiras ou falsas diante algum ponto de vista estabelecido.

1.2. Estrutura de uma Proposição

Antes de validar o valor de verdade da proposição, é necessário formular a proposição em si. Para tal fim, podemos dizer que uma proposição é composta de dois elementos básicos: o sujeito e o predicado. O **sujeito** é o termo sobre o qual vai ser feita a afirmação ou negação da proposição, enquanto o **predicado** é o que é dito sobre o sujeito.

EXEMPLO

O céu é azul.

- “Céu” é o sujeito.
- “É azul” é o predicado.

Todos os seres humanos são mortais.

- “Seres humanos” é o sujeito.
- “São mortais” é o predicado.

Se eu estudar bastante, passarei no semestre.

- “Eu” é o sujeito.
- “Passarei no semestre” é predicado.

Ele estuda direito ou não vai passar no semestre.

- “Ele” é o sujeito.
- “Estuda direito ou não vai passar no semestre” é o predicado.

É válido ressaltar que diferentes tipos de proposições podem usar formatos diferentes, porém sempre será possível destacar o sujeito e o predicado dentro de uma proposição bem formulada. Repare nas diferenças dos exemplos acima, em como o sujeito e o predicado podem se alterar tão drasticamente em cada caso.

1.3. Tipos de Proposições

Considerando o que já sabemos de proposições, podemos afirmar que existem duas características principais delas: estrutura e conteúdo. Essas características servem de indicadores para a tipagem das proposições, sendo que qualquer proposição classificada por certo tipo de estrutura pode ser, também, classificada por qualquer tipo de conteúdo. Vamos primeiro ver as classificações estruturais principais.

- Proposições categóricas.
 - Afirmam ou negam a relação entre os dois termos.

EXEMPLO

Todos os gatos são mamíferos.
Nenhum pássaro é um peixe.

- Proposição condicional.
 - Estabelecem relação entre duas outras proposições, sendo a primeira uma condição para que a segunda ocorra.

EXEMPLO

Se hoje chover, vai ficar mais fresco.
Se eu correr, não vou me atrasar.

- Proposição disjuntiva.
 - Afirmam a exclusão mútua entre duas ou mais opções.

EXEMPLO

Ou vou ao cinema ou vou jantar com amigos.
Ou estudo ou reprovo o semestre.

- Proposições conjuntivas.
 - Afirmam a conjunção entre duas ou mais proposições.

EXEMPLO

Ele estuda e trabalha ao mesmo tempo.
Aquele cantor canta e dança!

- Proposições existenciais.
 - Afirmam a existência de algo ou alguém.

EXEMPLO

Existe pelo menos uma cidade no mundo que é maravilhosa.

Há pelo menos uma pessoa neste curso.

- Proposições modais.
 - Expressam a possibilidade, necessidade ou impossibilidade de algo acontecer.

EXEMPLO

É possível que chova amanhã.

É necessário que estudemos para a prova.

E, agora, vamos às classificações diante do conteúdo das proposições:

- Afirmativas ou negativas.
 - Afirmam ou negam uma relação entre os termos.

EXEMPLO

Todo cachorro é mamífero – afirmativa.

Nenhum cachorro é um réptil – negativa.

- Universais ou particulares.
 - As universais afirmam ou negam algo sobre todos os elementos de determinado conjunto.
 - Particulares afirmam ou negam algo sobre alguns elementos de determinado conjunto.

EXEMPLO

Todos os cães ladram – universal.

Algumas aves não voam – particular.

- Simples e compostas.
 - As simples contêm apenas um sujeito e um predicado, enquanto as compostas são formadas por duas ou mais proposições simples.

EXEMPLO

O sol é quente – simples.

Se o sol estiver quente, eu vou à praia – composta.

Repare como as classificações são fluidas, no sentido de que uma proposição, ou sentença, pode possuir mais de um tipo de classificação ao mesmo tempo. Seja classificação estrutural ou quanto ao conteúdo, toda proposição possui ao menos uma tipagem. Essas classificações não são as únicas que existem, porém são as mais comuns de serem utilizadas. Toda essa tipagem e classificação auxilia a entender melhor as relações entre as proposições e a lógica empregada por trás delas.

2. Conectivos e Operações Lógicas

Os conectivos lógicos são elementos fundamentais da lógica. Eles são usados para que seja possível o estudo das relações entre proposições e argumentos. Eles permitem que se combinem proposições simples e assim se formem proposições compostas, que são a base do raciocínio lógico matemático.

Formalizados na Antiguidade pelos filósofos Platão e Aristóteles, os conectivos lógicos continuaram a ser desenvolvidos e utilizados ao longo da história da matemática e filosofia e são, ainda hoje, um importante objeto de estudo.

As operações lógicas, feitas por meio dos operadores lógicos, são comumente confundidas com os conectivos em si, e, muitas vezes, esses termos são utilizados de forma intercambiável. Porém, existe uma diferença sutil entre eles: os operadores lógicos são símbolos ou funções que aplicam uma operação sobre um ou mais valores lógicos, sendo os mais comuns e básicos o NOT, AND e OR; já os conectivos são palavras ou frases que são utilizadas para conectar proposições em uma sentença lógica e são formalmente representados por símbolos.

O operador **NOT** (NÃO) é conhecido como negação; ele inverte o valor lógico de uma expressão, tornando o verdadeiro em falso e vice-versa. O operador **AND** (E) retorna verdadeiro se ambas as expressões forem verdadeiras; se pelo menos uma for falsa, o resultado será falso. Já o operador **OR** (OU) retorna verdadeiro se pelo menos uma das expressões for verdadeira e só resulta em falso caso ambas sejam falsas.

Os conectivos lógicos são representados em fórmulas, por símbolos específicos, e são lidos de formas distintas, que facilitam o entendimento da sintaxe da equação. Essas fórmulas lógicas diferem de fórmulas matemáticas, pois seu resultado é um valor lógico de verdadeiro ou falso, como veremos em seguida.

Vou detalhar os conectivos lógicos mais comuns a seguir, mostrando como se faz a leitura, qual seu símbolo, sua estrutura lógica formal e seu valor lógico e, então, para finalizar, alguns exemplos. Repare também que nessas explicações vou sempre utilizar “p” e “q” como proposições genéricas para exemplificar diversas situações e casos diferentes.

- **Negação.**

- Símbolo: $\neg$ ou $\sim$
- Estrutura lógica formal: $\neg p$
- Leitura: não
- Também conhecido como NOT

O conectivo lógico de negação é usado para inverter o valor lógico de uma proposição. A negação é um dos conectivos lógicos mais simples e comuns, sendo amplamente utilizado na lógica proposicional e na matemática. O seu **valor lógico** retorna verdadeiro (V) apenas quando ambas as proposições p e q são verdadeiras (V); caso contrário, retorna falso (F). Esse não é um conectivo binário, ou seja, não requer duas proposições para ser aplicado.

Qualquer proposição pode ser tratada com o conectivo de negação, o que a torna “não verdadeira”. Confira os exemplos das proposições “p” a seguir.

EXEMPLO

p = Fulano está estudando.

$\neg p$ = Fulano não está estudando.

- **Conjunção.**

- Símbolo: $\wedge$ ou “.”
- Estrutura lógica formal: $p \wedge q$
- Leitura: e, mas
- Também conhecido como AND

Esse conectivo é utilizado para conectar duas proposições logicamente. A conjunção é verdadeira somente quando ambas as proposições que ela conecta são verdadeiras. O **valor lógico** retorna verdadeiro (V) apenas quando ambas as proposições p e q são verdadeiras (V); caso contrário, retorna falso (F). Agora, já estamos falando de um conectivo binário, isto é, ele necessita de duas proposições para ser utilizado.

É importante ressaltar, ainda, que a conjunção é associativa e comutativa. Isso significa que a ordem em que as proposições são conectadas não afeta o valor lógico da conjunção. Dessa forma, “ $P \wedge Q \wedge R$ ” é equivalente a “ $Q \wedge P \wedge R$ ” ou “ $R \wedge Q \wedge P$ ”.

EXEMPLO

O número X é par, e X é positivo.

Essa fórmula só pode ser verdadeira caso o número X seja positivo e par simultaneamente; caso uma das proposições seja falsa, o valor retornado dessa equação seria negativo.

- **Disjunção inclusiva.**

- Símbolo: V ou +
- Leitura: ou
- Estrutura lógica formal: $p \vee q$
- Também conhecido como OR

Outro conectivo binário, esse operador é utilizado para conectar duas proposições, de forma que apenas uma delas seja verdadeira. O **valor lógico** que retorna do conectivo de disjunção é verdadeiro (V) se pelo menos uma das proposições p ou q for verdadeira (V); caso contrário, retorna falso (F). Esse conectivo é utilizado quando tanto faz se só uma ou se todas as proposições forem verdadeiras, para que o retorno do valor lógico seja verdadeiro.

EXEMPLO

Esse filme é de terror ou suspense!

Tanto faz qual das proposições é verdadeira ou sequer se o filme pertence a um dos dois gêneros; o fato é que ele é um desses dois ou os dois ao mesmo tempo.

- **Disjunção exclusiva.**

- Símbolo: $\oplus$
- Leitura: ou exclusivo
- Estrutura lógica formal: $p \oplus q$
- Também conhecido como XOR

Esse conector é utilizado quando possuímos um “ou exclusivo”, o que significa que apenas uma das proposições pode ser verdadeira. Outra forma de compreender isso é dizer que é uma ou outra, porém não ambas. O **valor lógico** da disjunção exclusiva é verdadeiro (V) quando apenas uma das proposições é verdadeira e falso (F) quando ambas as proposições são verdadeiras ou ambas são falsas.

EXEMPLO

Um número x é ímpar ou par.

Um número é, exclusivamente, ímpar ou par; ele não pode, sob nenhuma circunstância, ser os dois ao mesmo tempo.

- **Implicação ou condicional.**

- Símbolo: $\rightarrow$ ou $\Rightarrow$
- Leitura: se... então...
- Estrutura lógica formal: $p \rightarrow q$

O **valor lógico** do conectivo condicional retorna falso (F) apenas quando a proposição p é verdadeira (V) e a proposição q é falsa; caso contrário, retorna verdadeiro (V). O conectivo de implicação conecta duas proposições e representa a ideia de que a veracidade da primeira implica a veracidade da segunda.

EXEMPLO

Se está chovendo, então eu levo um guarda-chuva.

A condição de o sujeito levar o guarda-chuva é atrelada à condição do tempo; no caso, é necessário que chova para que isso ocorra.

- **Equivalência ou bicondicional.**

- Símbolo: $\equiv$
- Leitura: se e somente se
- Estrutura lógica formal: $p \equiv q$

Esse conectivo indica que duas proposições têm o mesmo valor lógico, ou seja, ou ambas são verdadeiras ou ambas são falsas. O **valor lógico** do conectivo de equivalência é verdadeiro (V) quando p e q têm o mesmo valor lógico, isto é, se ambas são verdadeiras ou se ambas são falsas. O conectivo é falso (F) quando p e q têm valores lógicos diferentes.

É necessário destacar que existem diferenças entre a equivalência e o bicondicional, apesar de serem extremamente semelhantes. O fato é que o conector de equivalência estabelece que obrigatoriamente ambas as proposições possuam o mesmo valor de veracidade, enquanto o conector bicondicional estabelece uma dupla condição, que permite que as proposições tenham valores diferentes, porém uma depende de que a outra seja cumprida para que sua existência seja real.

- Equivalente.
 - Hoje é terça-feira se e somente se amanhã for quarta-feira.

Obs.: Uma proposição tem, obrigatoriamente, o mesmo valor de veracidade da outra. Se hoje for terça-feira, amanhã será quarta-feira. Se hoje não for terça-feira, amanhã não pode ser quarta-feira.

- Bicondicional.
 - Eu irei na festa se e somente se Fulano não for.

Obs.: Uma proposição depende da outra para atestar sua veracidade, porém elas possuem valores distintos de veracidade.

Considerações Finais da Aula

A lógica proposicional é um dos principais pilares da matemática e da ciência da computação. A compreensão dos conceitos relacionados às proposições, às suas estruturas e aos seus tipos, bem como dos conectivos e das operações lógicas, é fundamental para o desenvolvimento de raciocínio lógico e para a construção de sistemas computacionais e de outras áreas de conhecimento.

Ao compreender a estrutura de uma proposição, os tipos de proposições e os conectivos e operadores lógicos, é possível construir expressões lógicas mais complexas e elaborar algoritmos e programas computacionais mais eficientes e robustos. Isso possibilita, por exemplo, a produção de sistemas de computadores, que são baseados em raciocínio e expressões lógicas extremamente complexas.

Materiais Complementares



Noções de Lógica

2015, Gustavo Augusto Lima de Campos.

Destaca algumas das principais noções presentes no estudo da ciência do raciocínio lógico.

Link para acesso: https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/432019/2/Livro_Nocoess%20de%20Logica.pdf (acesso em 25 abr. 2023.)



Lógica Matemática

2019, Alana Caiusca, Educa Mais Brasil.

Apresenta conceitos básicos da lógica matemática.

Link para acesso: <https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/matematica/logica-matematica> (acesso em 25 abr. 2023.)

Referências

NICOLETTI, Maria do C. *A Cartilha da Lógica*. 3. ed. [s.l.]: Grupo GEN, 2017. E-book. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788521633433/>. Acesso em: 22 mar. 2023.