

Soma, Subtração, Divisão e Multiplicação

Objetivo da Aula

Efetuar operações aritméticas nas bases binária, octal e hexadecimal.

Apresentação

Na aula anterior conhecemos as bases binária, octal e hexadecimal. Além disso, aprendemos como converter números entre elas.

Agora que já sabemos como funcionam as bases binária, octal e hexadecimal e como converter números entre elas, está na hora de aprendermos a somar, subtrair, multiplicar e dividir nelas.

As operações funcionam da mesma forma que na base decimal. Então, é hora de começarmos.

1. Soma em Binário

Para começarmos, vamos lembrar que:

$$0 + 0 = 0.$$

$$0 + 1 = 1.$$

$$1 + 0 = 1.$$

$$1 + 1 = 10 \text{ (= 2 em binário – vamos usar o “vai 1”).}$$

$$1 + 1 + 1 = 11 \text{ (= 3 em binário – e vamos usar o “vai 1” também).}$$

Como exemplo, vamos somar os números $(1101)_2$ e $(1011)_2$.

$$\begin{array}{r} 1101 \\ + 1011 \\ \hline 0 \end{array} \begin{array}{r} 1 \\ 1101 \\ + 1011 \\ \hline 00 \end{array} \begin{array}{r} 11 \\ 1101 \\ + 1011 \\ \hline 000 \end{array} \begin{array}{r} 111 \\ 1101 \\ + 1011 \\ \hline 1000 \end{array} \begin{array}{r} 1111 \\ 1101 \\ + 1011 \\ \hline 11000 \end{array}$$

Repare que o processo é o mesmo utilizado nas somas em decimal. E você verá que em octal e hexadecimal será da mesma forma.

1.1. Soma em Octal

Aqui precisamos lembrar que, como não usamos os algarismos 8 e 9, sempre que o resultado da soma igualar ou passar de 8, teremos o vai 1.

O algoritmo é simples:

1º caso: o resultado da soma está entre 0 e 7 – simplesmente o escrevemos, sem precisar o vai 1.

2º caso: o resultado iguala ou ultrapassa 8 – então executaremos os seguintes passos:

- Somamos 1 à próxima coluna (vai 1);
- Na coluna atual colocamos o quanto ultrapassou a base (no caso, 8).

Observe o exemplo abaixo, somando $(1563 + 1275)_8$.

			1	
	1	5	6	3
+	1	2	7	5
				0

(a)

		1	1	
	1	5	6	3
+	1	2	7	5
			6	0

(b)

	1	1		
	1	5	6	3
+	1	2	7	5
		0	6	0

(c)

	1	1		
	1	5	6	3
+	1	2	7	5
	3	0	6	0

(d)

a) $3 + 5 = 8 \rightarrow$ colocamos o resultado igual a 0 (zero), pois devemos subtrair 8 (resultado maior do que 7) por 8 (a base octal). Então fica: $8 - 8 = 0$. Devemos adicionar 1 a próxima coluna a esquerda, pois a regra informa que ao ultrapassar o valor, subtraímos, inserimos o resultado e adicionamos 1 a próxima coluna a esquerda.

b) $1 + 6 + 7 = 14 \rightarrow$ colocamos o resultado igual a 6, pois devemos subtrair 14 (resultado maior do que 7) por 8 (a base octal). Então fica: $14 - 8 = 6$. Devemos adicionar 1 a próxima coluna a esquerda, pois a regra informa que ao ultrapassar o valor, subtraímos, inserimos o resultado e adicionamos 1 a próxima coluna a esquerda.

c) $1 + 5 + 2 = 8 \rightarrow$ colocamos o resultado igual a 0 (zero), pois devemos subtrair 8 (resultado maior do que 7) por 8 (a base octal). Então fica: $8 - 8 = 0$. Devemos adicionar 1 a próxima coluna a esquerda, pois a regra informa que ao ultrapassar o valor, subtraímos, inserimos o resultado e adicionamos 1 a próxima coluna a esquerda.

d) $1 + 1 + 1 = 3 \rightarrow$ colocamos o resultado igual a 3 e, como está entre 0 e 7, não precisamos adicionar nada na próxima coluna.

1.2. Soma em Hexadecimal

Aqui usaremos o mesmo raciocínio. Mas lembre-se: como estamos trabalhando na base decimal, tudo o que fizemos em relação a 8 na base octal faremos em relação ao 16 na base hexadecimal.

Assim, quando a soma ficar entre 0 e 15, usaremos o algarismo (ou letra) correspondente, sem precisar adicionar 1 à próxima coluna. E quando igualar ou passar de 16 utilizaremos o mesmo raciocínio do octal.

Como exemplo, vamos efetuar $(AF97 + BC59)_{16}$.

			1	
	A	F	9	7
+	B	C	5	9
			F	0

(a)

	1		1	
	A	F	9	7
+	B	C	5	9
		B	F	0

(b)

1	1		1	
	A	F	9	7
+	B	C	5	9
	6	B	F	0

(c)

1	1		1	
	A	F	9	7
+	B	C	5	9
1	6	B	F	0

(d)

a) $7 + 9 = 16 \rightarrow$ colocamos o resultado igual a 0 (zero), pois devemos subtrair 16 (resultado maior do que 15) por 16 (a base hexadecimal). Então fica: $16 - 16 = 0$. Devemos adicionar 1 a próxima coluna a esquerda, pois a regra informa que ao ultrapassar o valor, subtraímos, inserirmos o resultado e adicionamos 1 a próxima coluna a esquerda.

b) $1 + 9 + 5 = 15 \rightarrow$ como 15 é menor do que 16, colocamos a letra correspondente ao 15, a letra F.

c) $15(F) + 12(C) = 27 \rightarrow$ colocamos o resultado igual a B (11), pois devemos subtrair 27 (resultado maior do que 15) por 16 (a base hexadecimal). Então fica: $27 - 16 = 11$ (B). Devemos adicionar 1 a próxima coluna a esquerda, pois a regra informa que ao ultrapassar o valor, subtraímos, inserirmos o resultado e adicionamos 1 a próxima coluna a esquerda.

d) $1 + 10(A) + 11(B) = 22 \rightarrow$ colocamos o resultado igual a 6, pois devemos subtrair 22 (resultado maior do que 15) por 16 (a base hexadecimal). Então fica: $22 - 16 = 6$. Devemos adicionar 1 a próxima coluna a esquerda, pois a regra informa que ao ultrapassar o valor, subtraímos, inserirmos o resultado e adicionamos 1 a próxima coluna a esquerda. Neste caso, ao subir o 1, consequentemente faremos a $1 + 0$ (nada, vazio da coluna) e será igual a 1. Resultado: 16BF0

2. Subtração em Binário

Agora vamos usar, como em decimal, o recurso de “pedir emprestado”. Lembrando uma regra simples: quem empresta perde um e quem ganha emprestado ganha o valor da base. Isso valerá para todas as bases com que trabalhamos aqui.

Vamos efetuar, como exemplo $(110001 - 101111)_2$.

$$\begin{array}{r} 110001 \\ - 101111 \\ \hline \end{array}$$

Subtração trivial

$$\begin{array}{r} 01110 \\ 110001 \\ - 101111 \\ \hline 10 \end{array}$$

Como foi necessário “pedir emprestado”, o primeiro 1 encontrado à esquerda vira zero e haverá uma sequência de empréstimos até a coluna em que estamos trabalhando. Nesse caso o 0 ganha 2 (10). Teremos então $(10 - 1)_2 = 1$

$$\begin{array}{r} 011 \\ 110001 \\ - 101111 \\ \hline 010 \end{array}$$

A partir daqui as subtrações são triviais e só teremos zeros à esquerda

2.1. Subtração em Octal

Aqui também precisaremos do recurso de “pedir emprestado”, lembrando de que quem emprestar perderá 1 e quem receber ganhará 8.

Vamos ao exemplo efetuando $(7214 - 1636)_8$.

$$\begin{array}{r} 7214 \\ - 1636 \\ \hline \end{array}$$

Como 4 é menor do que 7, terá que pedir emprestado ao 1

$$\begin{array}{r} 12 \\ 7204 \\ - 1636 \\ \hline 6 \end{array}$$

Ao emprestar, o 1 virou 0 e o 4, recebendo 8, virou 12. Então, $12 - 6 = 6$

$$\begin{array}{r} 8 \\ 7104 \\ - 1636 \\ \hline 56 \end{array}$$

Como 0 é menor do que 3, terá que pedir emprestado ao 2, que vira 1 e o 0, ao receber emprestado, vira 8. Finalmente, $8 - 3 = 5$

$$\begin{array}{r} 9 \\ 6104 \\ - 1636 \\ \hline 5356 \end{array}$$

Como 1 é menor do que 6, terá que pedir emprestado ao 7, que vira 6 e o 1, ao receber emprestado, vira 9. Finalmente, $9 - 6 = 3$

Finalizando, $6 - 1 = 5$

2.2. Subtração em Hexadecimal

Aqui executaremos o mesmo algoritmo, sempre lembrando que os valores entre 10 e 15 serão substituídos pelas letras e que, na regra do pedir emprestado, aquele que receber o empréstimo ganhará 16.

Vamos efetuar $(A741 - 8BED)_{16}$.

$\begin{array}{r} A741 \\ - 8BED \\ \hline \end{array}$	Como 1 é menor do que D (13), terá que pedir emprestado ao 4
$\begin{array}{r} A7\overset{17}{3}1 \\ - 8BED \\ \hline 4 \end{array}$	Ao emprestar, o 4 virou 3 e o 1, recebendo 16, virou 17. Então, $17 - 13 = 4$
$\begin{array}{r} A\overset{19}{6}31 \\ - 8BED \\ \hline 54 \end{array}$	Como 3 é menor do que E (14), terá que pedir emprestado ao 7, que vira 6 e o 3, ao receber emprestado, vira 19. Finalmente, $19 - 14 = 5$
$\begin{array}{r} \overset{22}{9}631 \\ - 8BED \\ \hline 1B54 \end{array}$	Como 6 é menor do que B (11), terá que pedir emprestado ao A, que vira 9 e o 6, ao receber emprestado, vira 22. Finalmente, $22 - 11 = 11$ (B)
	Finalizando, $9 - 8 = 1$

3. Multiplicação em Binário

Aqui também vamos utilizar o mesmo algoritmo que usamos nas multiplicações em decimal.

Lembrando que $0 \times 0 = 0$, $0 \times 1 = 0$ e $1 \times 1 = 1$.

Como exemplo, vamos efetuar $(1101 \times 101)_2$.

$\begin{array}{r} 1101 \\ \times 101 \\ \hline 1101 \\ 00000 \\ + 110100 \\ \hline 1000001 \end{array}$	O primeiro passo é multiplicar cada algarismo do número de baixo pelo número de cima. O segundo passo é somar as parcelas.
---	--

3.1. Multiplicação em Octal

Para facilitar essa operação, vamos utilizar uma tabela com uma “tabuada” em octal.

X	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61

Com ajuda dessa tabela, vamos efetuar $(32 \times 45)_8$.

$$\begin{array}{r}
 \overset{1}{45} \\
 \times 32 \\
 \hline
 2
 \end{array}$$

Usando nossa tabela, veremos que $2 \times 5 = 12$. Assim colocamos o 2 embaixo e subimos o 1

$$\begin{array}{r}
 \overset{1}{45} \\
 \times 32 \\
 \hline
 112
 \end{array}$$

$2 \times 4 = 10$; somando com o 1 que subiu, teremos 11.

$$\begin{array}{r}
 \overset{1}{45} \\
 \times 32 \\
 \hline
 112 \\
 157
 \end{array}$$

Agora efetuamos a multiplicação por 3.

$$\begin{array}{r}
 45 \\
 \times 32 \\
 \hline
 112 \\
 +157 \\
 \hline
 1702
 \end{array}$$

Finalmente, efetuamos a soma.

3.2. Multiplicação em Hexadecimal

Da mesma forma que fizemos com a base octal, vamos usar uma tabela para nos auxiliar.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
2	0	2	4	6	8	A	C	E	10	13	14	16	18	1A	1C	1E
3	0	3	6	9	C	F	12	15	18	1B	1E	21	24	27	2A	2D

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
4	0	4	8	C	10	14	18	1C	20	24	28	2C	30	34	38	3C
5	0	5	A	F	14	19	1E	23	28	2D	32	37	3C	41	46	4B
6	0	6	C	12	18	1E	24	2A	30	36	3C	42	48	4E	54	5A
7	0	7	E	15	1C	23	2A	31	38	3F	46	4D	54	5B	62	69
8	0	8	10	18	20	28	30	38	40	48	50	58	60	68	70	78
9	0	9	13	1B	24	2D	36	3F	48	51	5A	63	6C	75	7E	87
A	0	A	14	1E	28	32	3C	46	50	5A	64	6E	78	82	8C	96
B	0	B	16	21	2C	37	42	4D	58	63	6E	69	84	8F	9A	A5
C	0	C	18	24	30	3C	48	54	60	6C	78	84	90	9C	A8	B4
D	0	D	1A	27	34	41	4E	5B	68	75	82	8F	9C	A9	B6	C3
E	0	E	1C	2A	38	46	54	62	70	7E	8C	9A	A8	B6	C4	D2
F	0	F	1E	2D	3C	4B	5A	69	78	87	96	A5	B4	C3	D2	E1

Como exemplo, vamos efetuar $(3F \times D9)_{16}$.

$$\begin{array}{r}
 \overset{8}{D9} \\
 \times \overset{8}{3F} \\
 \hline
 7
 \end{array}$$

Usando nossa tabela, veremos que $F \times 9 = 87$. Assim colocamos o 7 embaixo e subimos o 8

$$\begin{array}{r}
 \overset{8}{D9} \\
 \times \overset{8}{3F} \\
 \hline
 CB7
 \end{array}$$

$F \times D = C3$; somando com o 8 que subiu, teremos CB.

$$\begin{array}{r}
 \overset{1}{D9} \\
 \times \overset{3567}{3F} \\
 \hline
 CB7 \\
 28B
 \end{array}$$

Agora efetuamos a multiplicação por 3.

$$\begin{array}{r}
 D9 \\
 \times 3F \\
 \hline
 CB7 \\
 +28B \\
 \hline
 3567
 \end{array}$$

Finalmente, efetuamos a soma.

4. Divisão em Binário

A operação de divisão em binário segue o mesmo procedimento da divisão em binário, com a diferença de que quando o valor do dividendo é menor do que o divisor, o quociente recebe 0. Se o dividendo foi maior ou igual ao divisor, o quociente recebe 1.

Para entender melhor, vamos a um exemplo, efetuando $(111010 \div 11)_2$.

$$\begin{array}{r} 111010 \overline{) 11} \\ 0 \quad 1 \end{array}$$

O dividendo em questão é igual ao divisor. Assim, colocamos 1 no quociente e 0 no resto.

$$\begin{array}{r} 111010 \overline{) 11} \\ 01 \quad 10 \end{array}$$

Agora o dividendo é menor do que o divisor. Então colocamos o 0 no quociente e "baixamos" mais um número.

$$\begin{array}{r} 111010 \overline{) 11} \\ 010 \quad 100 \end{array}$$

Como o dividendo continua menor que o divisor, colocamos outro 0 e "baixamos" mais um número.

$$\begin{array}{r} 111010 \overline{) 11} \\ 0101 \quad 1001 \\ - 11 \quad \quad \quad \\ \hline 100 \end{array}$$

Agora o dividendo é maior do que o divisor. Então colocamos 1 no quociente, subtraímos o divisor do dividendo e "baixamos" o próximo número.

$$\begin{array}{r} 111010 \overline{) 11} \\ 0101 \quad 10011 \\ - 11 \quad \quad \quad \\ \hline 100 \\ - 11 \quad \quad \quad \\ \hline 1 \end{array}$$

Da mesma forma, subtraímos o divisor do dividendo. Como não temos mais como "baixar" outro número, chegamos ao fim com a divisão tendo resto 1.

4.1. Divisão em Octal

Vamos agora efetuar a divisão na base octal. Como já mencionamos, o raciocínio é o mesmo das bases binária e decimal, considerando que não vamos usar os algarismos 8 e 9.

Para isso, vamos efetuar $(443 \div 17)_8$.

Para facilitar essa operação é bom colocarmos uma tabuada em octal do divisor (que é o 17), como a seguir:

$$17 \times 1 = 17$$

$$17 \times 2 = 36$$

$$17 \times 3 = 55$$

$$17 \times 4 = 74$$

$$17 \times 5 = 113$$

$$17 \times 6 = 132$$

$$17 \times 7 = 151$$

$$17 \times 10 = 170$$

$$\begin{array}{r} 443 \overline{)17} \\ -36 \\ \hline 6 \end{array}$$

O dividendo é maior do que o divisor. Então, pela tabuada, vemos a linha a ser usada é a segunda.

$$\begin{array}{r} 443 \overline{)17} \\ -36 \\ \hline 63 \\ -55 \\ \hline 6 \end{array}$$

Agora baixamos o 3 e, com ajuda da tabuada, vemos que a linha a ser usada é a terceira.

Como não temos mais como dividir, o quociente é 23 e o resto da divisão é 6.

4.2. Divisão em Hexadecimal

Nesta última operação aritmética vamos repetir o processo usado na base octal e criar uma tabuada do divisor para facilitar.

Como exemplo, vamos efetuar $(B54A \div C1)_{16}$.

Para facilitar essa operação é bom colocarmos uma tabuada em hexa do divisor (que é o C1), como a seguir:

$$C1 \times 1 = C1$$

$$C1 \times 2 = 182$$

$$C1 \times 3 = 243$$

$$C1 \times 4 = 304$$

$$C1 \times 5 = 3C5$$

$$C1 \times 6 = 486$$

$$C1 \times 7 = 547$$

$$C1 \times 8 = 608$$

$$C1 \times 9 = 6C9$$

$$C1 \times A = 78A$$

$$C1 \times B = 84B$$

$$C1 \times C = 90C$$

$$C1 \times D = 9CD$$

$$C1 \times E = A8E$$

$$C1 \times F = B4F$$

$$C1 \times 10 = C10$$

$$\begin{array}{r} \text{B54A} \overline{) \text{C1}} \\ - \text{B4F} \quad \text{F} \\ \hline 5 \end{array}$$

O dividendo é maior do que o divisor. Então, pela tabuada, vemos a linha a ser usada é a décima quinta.

$$\begin{array}{r} \text{B54A} \overline{) \text{C1}} \\ - \text{B4F} \quad \text{F0} \\ \hline \text{5A} \end{array}$$

Agora baixamos o A e, como o novo dividendo é menor do que o divisor, colocamos 0 no quociente e o resto da divisão fica sendo 5A.

Considerações Finais

Nesta aula vimos como trabalhar as quatro operações aritméticas nas bases binária, octal e hexadecimal.

São algoritmos semelhantes usados nas três bases (assim como na base decimal) e, embora pareça complicado a princípio, vemos com a prática que é muito simples trabalhar essas operações.

O mais importante é que, como qualquer atividade ligada à matemática, é fundamental a prática e repetição de exercícios para consolidar o aprendizado.

Como sugestão, utilize a calculadora do Windows, na versão programador, e pratique bastante até consolidar seu conhecimento.

Na próxima aula veremos estudaremos as portas lógicas que compõem os circuitos existentes no computador.

Até lá!

Materiais Complementares



Vídeo

Assista a esse vídeo bem didático com exemplos de multiplicação em octal. Link: <https://www.youtube.com/watch?v=3kStGiYGmkc&t=44s>.



Site

Nesse material você poderá ler um pouco sobre a importância da base hexadecimal. Link: <https://canaltech.com.br/produtos/O-que-e-sistema-hexadecimal/>.

Referências

STALLINGS, William. **Arquitetura e organização de computadores: projeto para o desempenho**. 8ª edição. Editora Pearson. Livro (642 p.). ISBN 9788576055648.

TANENBAUM, Andrew S. **Sistemas operacionais modernos**. 3ª edição. Editora Pearson. Livro (674 p.). ISBN 9788576052371.

TANENBAUM, Andrew S. **Organização estruturada de computadores**. 6ª edição. Editora Pearson. Livro (628 p.). ISBN 9788581435398.